Önálló projekt, szakmai gyakorlat I. beszámoló
Borsik Nóra

A szakdolgozatomban bevezettük az $(f, g; \sum w)$-FAS feladatot egy rangsorolási feladat általánosításaként. Az Önálló Projekt keretein belül is ezzel a feladattal és kapcsolódó gráffelbontási kérdésekkel foglalkoztunk.

Az $(f, g; \sum w)$-FAS feladat során adott egy $D = (V, E)$ irányított hurokélmentes gráf, egy $w : E \to \mathbb{R}_+$ élsúlyozással. A csúcsokon adott egy $f : V \to \mathbb{R}_+$ alsó korlát és egy $g : V \to \mathbb{R}_+$ felső korlát. Azt szeretnénk eldönteni, hogy létezik-e olyan sorrendje a csúcsoknak, mely szerint minden v csúcsra teljesül, hogy $f(v) \leq \overleftarrow{\delta}^{w}(v) \leq g(v)$, azaz minden csúcsnak a sorrend szerinti bal súlyozott kifoka a csúcshoz tartozó alsó és felső korlát között van. A feladat élsúlyozatlan esetét (f, g)-FAS feladatnak nevezzük.

Megmutattuk, hogy a feladat polinom időben megoldható, ha minden csúcsra csak felső korlát adott. Ehhez tekintsük azt az algoritmust, amely minden lépésben rögzít az utolsó szabad helyre egy csúcsot, melynek a súlyozott kifoka legfeljebb akkora mint a $g(v)$ felső korlát, és törli a gráfból. Ha az algoritmus nem akad el, akkor megengedett megoldást ad. Beláttuk, hogy ha elakad, akkor nem létezhet megoldás. Ebből következik, hogy pontosan akkor létezik $(-\infty, g; \sum w)$-FAS problémára megengedett megoldás, ha nem létezik olyan feszített részgráf, melyben minden v csúcsnak a részgráfra megszorított súlyozott kifoka nagyobb mint a $g(v)$ felső korlát. Hasonló algoritmus, illetve karakterizáció adható a feladat csak alsó korlátos esetére. Továbbá a feladat akkor is megoldható, ha vegyesen adottak alsó és felső korlátok, de minden csúcsra vagy csak alsó vagy csak felső korlát adott.

A feladat egy érdekes alkalmazásaként polinom időben eldönthető, hogy egy irányított gráf felbomlik-e egy befenyves és egy aciklikus részgráf uniójára. Megmutattuk, hogy pontosan akkor létezik ilyen felbontás, ha a $g \equiv 1$ felső korlátos $(-\infty, g)$-FAS feladat megoldható, azaz ha nem létezik olyan feszített részgráf, amelyben minden csúcsnak a részgráfra megszorított kifoka legalább 2.

Egy másik alkalmazáshoz tekintsünk egy versenyt, ahol különböző bírók sorrendeket állítanak fel a versenyzők halmazán. Egy versenyző elégedetlenségének nevezzük azon versenyzők számát, akiket megelőz a bírók többségénél, de a közös sorrendben nem. Célunk egy olyan közös sorrend meghatározása. amely minimalizálja a versenyzők elégedetlenségének a maximumát. Ezen feladat ekvivalens egy irányított gráfon egy olyan csúcssorrend keresésével, amely minimalizálja a maximális bal kifokot, így polinom időben megoldható az $(-\infty, g)$-FAS feladat segítségével. Más hasonló rangsorolási feladatok, például amikor a bírók elégedetlenségének a maximumát szeretnénk minimalizálni NP-teljesek [2].

Az algoritmus egyszerűsége miatt felmerül az (f, g)-FAS feladat nehézsége kis módosítások esetén. Beláttuk, hogy a feladat NP-teljes, ha egyetlen csúcsra pontos előírás, a többi csúcsra csak felső korlát adott. Hasonló természetes módosítás, ha nem követeljük meg az élsúlyozás nemnegativitását. Beláttuk, hogy ez a feladat is NP-teljes.

Vizsgáltuk az élsúlyozatlan (f, g)-FAS feladatot speciális korlátok esetén, például ha minden csúcsra azonos alsó és felső korlátok adottak. Beláttuk, hogy a feladat NP-teljes, már akkor is ha a gráf minden csúcsának a súlyozatlan értelemben vett foka legfeljebb 6, és az $f \equiv g$ korlát egy csúcsban 0, a többiben 1.

A továbbiakban rátérünk az ebben a félévben elért eredményekre. Korábban láttuk, hogy azonos alsó és felső korlátok esetén a feladat NP-teljes. A speciális korlátos esetek másik véglete, ha minél nagyobb a különbség az egyes csúcsokhoz tartozó alsó és felső korlát között. Azzal a feladattal foglalkoztunk, amikor adott egy s első csúcs és egy t utolsó csúcs, melyekre $f(s) = g(s) = 0$ és $f(t) = g(t) = \delta(t)$ és minden $v \neq \{s, t\}$ csúcsra $f(v) = a$ és $g(v) = \delta(v) - b$ korlátok adottak, valamely a és b konstansokra. Szemléletesen olyan csúcssorrendet keresünk, melyben s az első csúcs, t az utolsó és minden köztes csúcsból kiindul balra legalább a darab és jobbra legalább b darab él. A „legtágabb" korlátos $a = b = 1$ paraméteres esetben olyan csúcssorrendet keresünk, melyben az s és a t csúcs kivételével minden csúcsból kiindul legalább egy él balra és legalább egy él jobbra. A szakirodalomban ezt a feladatot irányított gráfokon értelmezett s-t számozás feladatnak nevezik és ismert, hogy polinom időben megoldható [3]. Bebizonyítottuk, hogy a feladat lényegében bármilyen szigorúbb korlátok esetén NP-teljes, tehát az első és utolsó csúcs kivételével $f \geq 1$, $g \leq \delta - 2$ korlátok esetén.

Az (f, g)-FAS feladat egy természetes módosításaként bevezettük a d-távolságú (f, g)-FAS feladatot, melyben az egyes csúcsokhoz tartozó g felső korlát az összes csúcs helyett csak a megelőző (legfeljebb) d csúcsra vonatkozik, azaz minden $i \in \{1, \ldots, |V|\}$-re az i-edik helyre kerülő csúcs előtti $\min\{d, i - 1\}$ darab csúcsra. Speciálisan a $d = |V|$ esetben visszakapjuk az eredeti feladatot. Megmutattuk, hogy a d-távolságú $(-\infty, g)$-FAS feladat polinom időben megoldható, ha $d = |V| - c$ valamely c konstansra. Azonban a feladat NP-teljes, ha a csúcsszámra és a d távolságra teljesül, hogy $|V| = (d+1)(l+1) - 2$, ahol $l = \Omega(|V|^c)$ valamely $c > 0$ konstansra. Ebből speciális esetként kapjuk, hogy a feladat nehéz a $d = 1$ és a $d = \sqrt{|V|}$ esetben.

A továbbiakban speciális tulajdonságú feedback arc set-ekkel foglalkozunk, azaz egy irányított gráfról szeretnénk eldönteni, hogy felbontható-e egy speciális alakú és egy aciklikus részgráf uniójára. Például egy szeptemberi cikkben belátták, hogy NP-teljes annak eldöntése, hogy egy gráf felbomlik-e egy kör és egy aciklikus részgráf uniójára, illetve egy irányított diszjunkt körfedés és egy aciklikus részgráf uniójára [1].

Korábban láttuk, hogy a $(-\infty, g)$-FAS feladat alkalmazásaként polinom időben eldönthető, hogy egy gráf felbomlik-e egy befenyves és egy aciklikus részgráf uniójára. Azonban megmutattuk, hogy legkisebb élszámú befenyvesre és aciklikus gráfra bonthatóság NP-nehéz feladat.

A befenyvesre és aciklikus részgráfra bonthatóság akkor is megoldható, ha bizonyos csúcsokról megköveteljük, hogy a befenyvesben gyökerek legyenek (lehet, hogy más csúcsok is gyökerek lesznek). Ennek a feladatnak a nehézsége nyitott kérdés, ha pontosan egy gyökeret követelünk meg, azaz befenyőre és aciklikus részgráfra bontást keresünk. Azonban ismert, hogy befenyőre és feszítő aciklikusra bonthatóság NP-teljes [1]. Megmutattuk, hogy minimális költségű befenyőre és aciklikus gráfra bonthatóság NP-nehéz feladat, már 0-1 élköltségek esetén is.

Foglalkoztunk továbbá párosításra és aciklikus részgráfra bonthatósággal. Reméltük, hogy ha nem követelünk meg feltételeket a párosítás méretére, akkor a befenyvesek esetéhez hasonlóan megoldható feladatot kapunk. Azonban beláttuk, hogy már páros gráfokon is NP-teljes feladat eldönteni, hogy felbonthatóak-e egy teljes párosítás és egy aciklikus részgráf uniójára, illetve tetszőleges párosítás és aciklikus részgráf uniójára.

Az eredményekből TDK-dolgozat készült magyar nyelven. A következő félévben folytatjuk a gráffelbontási feladatok vizsgálatát, és cikket írunk a témából.

Hivatkozások

[1] Jørgen Bang-Jensen, Stéphane Bessy, Daniel Gonçalves, and Lucas Picasarri-Arrieta. Complexity of some arc-partition problems for digraphs. *Theoretical Computer Science*, 928:167–182, 2022.

[2] Therese Biedl, Franz J. Brandenburg, and Xiaotie Deng. On the complexity of crossings in permutations. *Discrete Mathematics*, 309(7):1813–1823, 2009.

[3] Joseph Cheriyan and John H. Reif. Directed s-t numberings, rubber bands, and testing digraph k-vertex connectivity. *Combinatorica*, 14(4):435–451, 1994.