

Megszorított feedback arc set és sorbarendezési feladatok

Borsik Nóra Anna
Alkalmazott matematikus MSc

Témavezető: Madarasi Péter

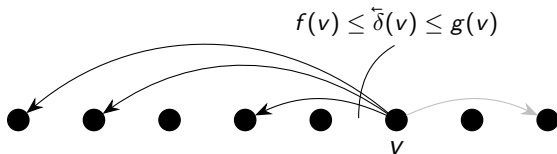
Az $(f, g, \sum w)$ -FAS feladat

$(f, g; \sum w)$ -FAS feladat

Adott egy $D = (V, E)$ irányított gráf, egy $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élsúlyozással és $f : V \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ alsó és felső korlátokkal.

Létezik-e olyan sorrend, mely szerint minden csúcsnak a sorrend szerinti bal súlyozott kifoka $f(v)$ és $g(v)$ között van?

Élsúlyozatlan esetben (f, g) -FAS feladatnak nevezzük.



Tétel

A csak felső korlátos $(-\infty, g, \sum w)$ -FAS feladat polinom időben megoldható.

Állítás

Az $(f, g, \sum w)$ -FAS feladat polinom időben megoldható ha egyes csúcsokra csak alsó, a többi csúcsra csak felső korlát adott.

Nehézségi eredmények

Az eddig tárgyalt esetek már kis módosításokkal NP-teljessé válnak.

Tétel

Az (f, g) -FAS feladat NP-teljes, ha egy csúcsra pontos előírás, a többi csúcsra csak felső korlát adott.

Tétel

A $(-\infty, g; \sum w)$ -FAS feladat NP-teljes, ha megengedünk negatív $w(e)$ élsúlyokat.

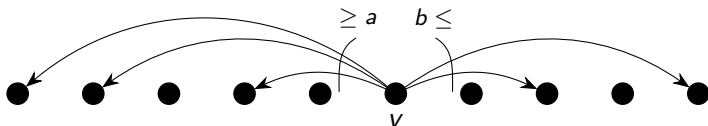
Tétel

Az (f, g) -FAS probléma NP-teljes az $f \equiv g$ esetben. A feladat már akkor is nehéz, ha minden csúcs súlyozatlan értelemben vett foka legfeljebb 6, és az $f \equiv g$ korlát egy csúcsban 0, a többiben 1.

Tág korlátos eset

Az első és az utolsó csúcs kivételével $f(v) = a$, $g(v) = \delta(v) - b$ korlátos (f, g) -FAS feladat.

Azaz olyan sorrendet keresünk, melyben minden nem szélső csúcsból kiindul balra legalább a és jobbra legalább b él.



Az $a = b = 1$ esetben az úgynevezett s - t számozás feladatot kapjuk.

Tétel (Cheriyán és Reif, 1994)

A feladat polinom időben megoldható $a = b = 1$ paraméterek esetén.

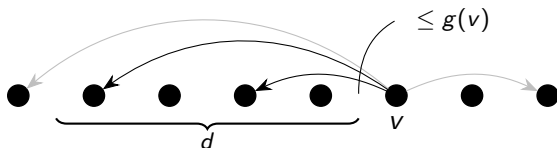
Tétel

A feladat NP-teljes tetszőleges $a \geq 1$ és $b \geq 2$ paraméterek esetén.

A d -távolságú $(-\infty, g)$ -FAS

d -távolságú $(-\infty, g)$ -FAS

Módosítjuk a csak felső korlátos $(-\infty, g)$ -FAS feladatot úgy, hogy az egyes csúcsokhoz tartozó g felső korlát az összes csúcs helyett csak a megelőző (legfeljebb) d csúcsra vonatkozzon.



A d -távolságú $(-\infty, g)$ -FAS

Tétel

A $D = (V, E)$ irányított gráfon a d -távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladat polinom időben megoldható, ha $d = |V| - c$ valamely c konstansra.

Tétel

A d -távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladat NP-teljes a $D = (V, E)$ irányított gráfon, ha a csúcsszámra és a d távolságra teljesül, hogy $|V| = (d + 1)(l + 1) - 2$, ahol $l = \Omega(|V|^c)$ valamely $c > 0$ konstansra.

Tétel

Egy irányított gráf pontosan akkor egy befenyves és egy aciklikus gráf uniója, ha a $g \equiv 1$ korlátos $(-\infty, g)$ -FAS feladat megoldható, azaz nem létezik olyan feszített részgráf, amelyben minden csúcs kifoka legalább 2.

Tétel

Írányított gráfban NP-nehéz egy legkisebb befenyvest keresni, melynek komplementere aciklikus.

Tétel

Adott egy $D = (V, E)$ irányított gráf, az élein egy 0-1 költségfüggvénnyel. Ekkor NP-nehéz olyan minimális költségű befenyőt keresni, amelynek a komplementere aciklikus.

Tétel

NP-teljes eldönteni, hogy egy irányított páros gráf felbomlik-e egy (teljes) párosítás és egy aciklikus részgráf uniójára.

Tétel (Bang-Jensen, Bessy, Gonçalves és Picasarri-Arrieta, 2022)

NP-teljes eldönteni, hogy egy irányított gráf felbomlik-e egy irányított kör és egy aciklikus részgráf uniójára.

Tétel (Bang-Jensen, Bessy, Gonçalves és Picasarri-Arrieta, 2022)

NP-teljes eldönteni, hogy egy irányított gráf felbomlik-e egy diszjunkt irányított körfedés és egy aciklikus részgráf uniójára.

- $(f, g; \sum w)$ -FAS feladat: bal súlyozott kifok korlátos csúcissorrend
 - Polinomiális:
 - csak alsó vagy csak felső korlát
 - $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladat csak alsó vagy csak felső korlát
 - NP-teljes:
 - negatív élsúlyozás (nem monoton h_v)
 - egyetlen csúcson alsó és felső korlát
 - $f \equiv g$ korlát
 - $f = a, g = \delta - b$: balra legalább a jobbra legalább b él
 - d -távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladat „kis” d esetén
- Gráffelbontások
 - Polinomiális
 - befenyves+aciklikus
 - Nyitott
 - befenyő+aciklikus
 - NP-teljes
 - (teljes) párosítás+aciklikus
 - min költségű befenyves+aciklikus
 - min költségű befenyő+aciklikus