Egésztávolság-gráfok kromatikus száma

Készítette: Czirják Lilla
Témavezető: Damásdi Gábor
2022. DECEMBER

Bevezetés

Adott a pozitív egész számok halmazának egy részhalmaza, a D alaphalmaz. Nevezzük D által generáltnak azt a gráfot, melynek csúcsai a természetes számok, és két csúcs között pontosan akkor halad él, ha a hozzájuk tartozó számok különbsége a D halmaz eleme.

A projekt keretében néhány speciális alaphalmaz esetén vizsgáltuk az általuk generált gráfok kromatikus számát. Az [1] cikkben teljes körű választ találunk az összes, legfeljebb háromelemű, valamint azon négyelemű alaphalmazok esetén, melyek tartalmazzák elemként a 2-t és a 3-at, viszont a négyelemű eset általánosan nem megoldott. Célunk a kérdés vizsgálata további négyelemű alaphalmazok esetén elemi eszközökkel és python nyelven írt segédprogrammal. A félév során az $\{1, 2, x, y\}$ és $\{1, 3, x, y\}$ alakú alaphalmazokkal foglalkoztunk.

Felhasznált állítások

1. Definíció. *Egy gráf kromatikus száma az a szám, ahány szín szükséges és elegendő a gráf csúcsainak színezésére úgy, hogy bármely két, éllel összekötött csúcs különböző színű.*
A D halmaz által generált gráf kromatikus számát jelölje $\chi(D)$.

2. Állítás ([1])**.** $\chi(D) \leq |D| + 1$.

Feltehető, hogy D elemeinek legnagyobb közös osztója 1, ugyanis ellenkező esetben, ha $x > 1$ közös osztójuk, akkor a gráf független részgráfokra bomlik, melyek izomorfak a $D/x := \{\frac{d}{x} \mid d \in D\}$ halmaz által generált gráffal. Ennek felhasználásával a következő tételek megadják a kromatikus számot bármely két- és háromelemű alaphalmaz esetén.

3. Állítás ([1])**.** $D = \{a, b\},\ a \neq b,\ \mathrm{lnko}(a, b) = 1$ *esetén* $\chi(D) = 2$ *pontosan akkor teljesül, ha a és b is páratlan, különben* $\chi(D) = 3$.

4. Tétel ([1])**.** *Legyen* $D = \{a, b, c\},\ a < b < c,\ \mathrm{lnko}(a, b, c) = 1$. *Ekkor*

$$\chi(D) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 2 \nmid abc, \\ 4, & \text{ha } D = \{1, 2, 3m\}, \\ & \text{vagy } c = a + b \text{ és } 3 \nmid b - a, \\ 3, & \text{különben.} \end{cases}$$

A továbbiakban négyelemű alaphalmazokkal foglalkozunk.

5. Tétel ([1]). *$|D| = 4$ esetén $\chi(D) = 5$ pontosan akkor teljesül, ha $D = \{1, 2, 3, 4m\}$, vagy $D = \{x, y, y-x, y+x\}$, ahol x és y páratlan természetes számok.*

A D={1, 2, x, y} eset

Ebben a részben feltesszük, hogy az 1 és a 2 eleme az alaphalmaznak.

A 3. állítás alapján $\chi(\{1, 2\}) = 3$, ezért $\chi(D) \geq 3$. Továbbá az 5. tétel miatt $\chi(D) = 5$ pontosan akkor, ha $D = \{1, 2, 3, 4m\}$. Így a további esetekben a kromatikus szám csak 3 vagy 4 lehet.

6. Állítás. *$\chi(D) = 3 \Leftrightarrow 3 \nmid xy$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy 3 a kromatikus szám, és jelöljük a színezéshez használt színeket az A, B és C betűkkel, a 0 csúcs színe legyen A. Ekkor az 1-es színe nem lehet A, legyen ez B. $1, 2 \in D$ miatt a 2-es csúcs színe csak C lehet, és a teljes színezés meghatározott:
A B C A B C A B C...
Tehát $1, 2 \in D$, $\chi(D) = 3$ esetén egyféle színezés lehetséges. Ebben minden harmadik szám kap ugyanolyan színt, tehát ez pontosan akkor jó, ha D nem tartalmaz hárommal osztható számot. □

A fentiek miatt a D={1, 2, x, y} esetet teljes egészében lefedtük.

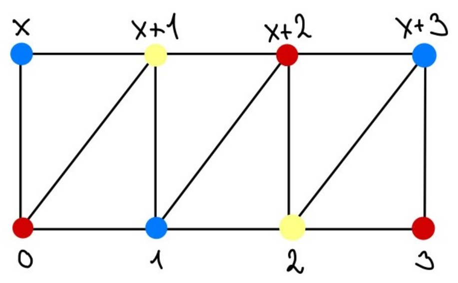
A D={1, 3, x, y} eset

A továbbiakban feltesszük, hogy az 1 és a 3 eleme az alaphalmaznak.

Az 5. tétel miatt $\chi(D) = 5$ pontosan akkor, ha $x = 2$ és $y = 4m$, továbbá $\chi(D) = 2$ pontosan akkor, ha x és y is páratlan (3. állítás). A kimaradó esetekben a kromatikus szám 3 vagy 4. Az alábbi két állítás megadja a választ néhány speciális alaphalmaz esetén.

7. Állítás. *$D = \{1, 3, x, x+1\}$, $x \geq 4$ esetén $\chi(D) = 4$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\chi(D) = 3$. Tekintsük a generált gráf azon részgráfját, ami a 0, 1, 2, 3, x, $x+1$, $x+2$ és $x+3$ csúcsokat tartalmazza. A 0, x és $x+1$ csúcsok háromszöget alkotnak, ezért ezeket három különböző színnel kell színezni. Az alábbi ábrán látható további háromszögek miatt a többi csúcs színe ezután meghatározott.



A 0 és a 3 színe azonos, viszont közöttük is halad él a gráfban, így ez a színezés nem jó. Három szín tehát nem elég a gráf csúcsainak jól színezésére, így az 5. tételt felhasználva a kromatikus szám 4. □

8. Állítás. *$D = \{1, 3, x, 2x\}$, $x \geq 5$ esetén $\chi(D) = 3$.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy a kromatikus szám legalább 3, így elegendő megadni egy jó színezést 3 színnel. Jelölje a használt színeket A, B és C.

1. eset: x páratlan szám.

$k \cdot x$ és $(k+1)x$ között mindig két színt használunk felváltva, az alábbi módon:

$$\underset{0}{A}\ B\ A\ B\ A\ B...\underset{x}{B}\ C\ B\ C\ B\ C...\underset{2x}{C}\ A\ C\ A\ C\ A...\underset{3x}{A}\ B\ A\ B\ A\ B...$$

Könnyedén ellenőrizhető, hogy ez jó színezés.

2. eset: x páros szám.

Színezzük a csúcsokat 0 és $(x-3)$ között felváltva az A és B színekkel. $(x-2)$ színe legyen C, $(x-1)$ színe B. Ezután x-től $(2x-3)$-ig felváltva C és A. Ezt követően $(2x-2)$ B, $(2x-1)$ pedig A színnel színezett. $2x$ és $(3x-3)$ között legyen felváltva B és C, végül $(3x-2)$ és $(3x-1)$ színei A és C. Innentől ez a $3x$-hosszú szakasz ismétlődik periodikusan.

$$\underset{0}{A}\ B\ A\ B\ A\ B...\underset{x-3}{B}\ C\ B\ \underset{x}{C}\ A\ C\ A\ C\ A...\underset{2x-3}{A}\ B\ A\ \underset{2x}{B}\ C\ B\ C\ B\ C...\underset{3x-3}{C}\ A\ C\ \underset{3x}{A}\ B\ A\ B\ A\ B...$$

Ebben az esetben is látható, hogy jó színezést kaptunk. □

További célok

A D={1, 3, x, y} eset még további vizsgálódást igényel, azonban a fő cél a kromatikus szám meghatározása minden négyelemű alaphalmaz esetén. Érdekes kérdés lehet továbbá, hogy mely végtelen halmazokra adható meg a válasz. Például, ha D a prímszámok halmaza, akkor egyszerűen belátható, hogy $\chi(D) = 4$.

Hivatkozások

[1] Liu, D.DF., Sutedja, A. Chromatic number of distance graphs generated by the sets {2,3,x,y}. J Comb Optim 25, 680–693 (2013).