Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Fenyőpakolások alkalmazásai

Önálló projekt I.

Barabás Ábel

Témavezető:

Király Csaba

Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2022

1 Bevezetés

A félév során az éldiszjunkt fenyőpakolások témakörébe eső különböző tételek feldolgozásával foglalkoztam nagyrészt önálló feladatmegoldáson keresztül. A hosszútávú cél az [1]-ben szereplő fenyőpakolásokról szóló tételek kiterjesztése.

2 Fenyőpakolások

Adott egy gyökeres digráf $D = (V + s, A)$, ahol s a gyökér. Nincsen s-be belépő él és az s-ből kimenő éleket **gyökéréleknek** hívjuk. Egy s-gyökerű fenyőt s-fenyőnek hívunk. Ha $X, Z \subseteq V + s$, akkor $\varrho_Z(X)$ jelölje a $Z - X$-ből X-be lépő A-beli élek számát.

Tétel 1. *(Edmonds, erős alak [3]) Legyen $\{B_1, \dots, B_k\}$ D gyökéréleinek egy partíciója. D-ben pontosan akkor létezik olyan $T_1, \dots, T_k$ élidegen feszítő s-fenyő, amire T_i gyökérélei B_i részhalmazát alkotják minden $i = 1, \dots, k$-ra, ha $\varrho_V(X) \geq |\{i \in \{1, \dots, k\} : B_i \cap \varrho_s(X) = \emptyset\}|$ minden $\emptyset \neq X \subseteq V$-re.*

Egy $v \in V$ csúcsra $P(v)$ jelölje azon V-beli csúcsok halmazát amiből elérhető v és egy $X \subseteq V$ halmazra $P(X) := \bigcup_{v \in X} P(v)$. Edmonds tételéből levezethető egy erősebb állítás, az ún. Japán-fenyőtétel [5], ami arról az esetről mond valamit, amikor van olyan $i \in \{1, \dots, k\}$, amire nem minden csúcs érhető el s-ből B_i-beli éleken keresztül.

Tétel 2. *(Kamiyama, Katoh es Takizawa [5]) Legyen $\{B_1, \dots, B_k\}$ D gyökéréleinek egy partíciója. D-ben pontosan akkor létezik olyan $T_1, \dots, T_k$ élidegen feszítő s-fenyő, amire T_i gyökérélei B_i részhalmazát alkotják minden $i = 1, \dots, k$-ra és egy csúcs pontosan akkor van T_i-ben, ha B_i végpontjaiból elérhető, ha $\varrho_V(X) \geq |\{i \in \{1, \dots, k\} : B_i \cap \varrho_s(P(X)) \neq \emptyset\}| - |\{i \in \{1, \dots, k\} : B_i \cap \varrho_s(X) \neq \emptyset\}|$ minden $\emptyset \neq X \subseteq V$-re.*

Tegyük fel, hogy adva van egy $M = (\varrho_s(V), r)$ matroid a gyökéréleken. Ekkor a $T_1, \dots, T_k$ s-fenyők pakolását **M-alapúnak** hívjuk, ha minden T_i pontosan egy e_i gyökérélet tartalmaz és minden $v \in V$ csúcsra $\{e_i : v \in V(T_i)\}$ az M egy bázisát alkotja.

Tétel 3. *(Durand de Gevigney, Nguyen, Szigeti [2]) Pontosan akkor létezik D-ben egy M-alapú s-fenyőpakolás, ha $\varrho_V(X) \geq r(M) - r(\varrho_s(X)) =: p(X)$ minden $X \subseteq V$-re.*

Ez a tétel bebizonyítható az erős Edmonds tételhez hasonlóan. Egy $X \subseteq V$ halmaz **feszíti** az $Y \subseteq V$ halmazt, ha $\varrho_s(Y) \subseteq span_M(\varrho_s(X))$. Egy uv élet **rossznak** hívunk, ha v feszíti u-t, **jónak**, ha nem. A szükségességet a következő feladatokon keresztül lehet bebizonyítani:

1. Egy $X \subseteq V$ halmazt nevezzünk pontosnak, ha $\varrho_V(X) = p(X)$. Bizonyítsuk be, hogy metsző pontos halmazok metszete és uniója is pontos.
2. Legyenek $X, Y \subseteq V$ pontos halmazok. Bizonyítsuk be, hogy ha egy v csúcsot feszít X és Y is, akkor $X \cap Y$ is feszíti s-et. Ez valójában a következő matroidelméleti állítás: legyen $M = (S, r)$ egy matroid és $X, Y \subseteq S$, amikre $r(X) + r(Y) = r(X \cup Y) + r(X \cap Y)$. Ekkor ha $s \in span(X) \cap span(Y)$, akkor $s \in span(X \cap Y)$.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha $X \subseteq V$ nem feszít jó élet, akkor minden $v \in X$ feszíti X-et.
4. Bizonyítsuk be, hogy ha nincs jó él, akkor csak gyökérélekből lehet jó fenyőpakolást készíteni.
5. Egy pontos halmazt nevezzünk veszélyesnek, ha létezik olyan jó belépő uv él, amire X feszíti u-t. Tegyük fel, hogy uv egy olyan jó él, ami nem lép be veszélyes halmazba. Töröljük ki uv-t D-ből és húzzunk be v-be egy új gyökérélet, és bővítsük ki M-et úgy, hogy az új gyökérél legyen párhuzamos egy olyan u-ba belépő gyökéréllel, amit nem feszít a v-be belépő gyökérélek halmaza. Bizonyítsuk be, hogy ki tudjuk u egy olyan gyökérélét választani, amivel az új gráfban teljesülnek a tétel feltételei.
6. Legyen X egy tartalmazásra nézve minimális veszélyes halmaz. Lássuk be, hogy feszít jó élet.
7. Lássuk be, hogy az előző feladatbeli él nem lép be veszélyes halmazba.

A $T_1, \dots, T_k$ éldiszjunkt s-fenyőket **M-alapú elérhetőségi pakolásnak** hívjuk, ha minden T_i pontosan egy e_i gyökérélet tartalmaz és minden $v \in V$ csúcsra az $\{e_i : v \in V(T_i)\}$ feszíti a $\varrho_s(P(v))$ halmazt.

Tétel 4. *(Cs. Király [6]) Pontosan akkor létezik D-ben egy M-alapú elérhetőségi s-fenyőpakolás, ha* $\varrho_V(X) \geq r(\varrho_s(P(X))) - r(\varrho_s(X)) := p(X)$ *minden* $X \subseteq V$*-re.*

Ez a tétel bebizonyítható a 4. Tételből annak mintájára, ahogy az 1. Tételből bebizonyítható a 2. Tétel (Hörsch-Szigeti [4]). A szükségesség bizonyításának vázát a küvetkező feladatok adják:

1. Legyen C a D egy erősen összefüggő komponense. Lássuk be, hogy minden csúcsa $r(\varrho_s(P(C)))$ fenyőben van benne a pakolásból.
2. Legyen $D_1 := D - C$ es $M_1 := M|\varrho_s(V - C)$. Lássuk be, hogy D_1-ben létezik $T_1^1, \ldots, T_q^1$ M_1-alapú elérhetőségi fenyőpakolás $e_1^1, \ldots, e_q^1$ gyökérélekkel.
3. Legyen $T := \{t_{uv} : uv \in A, u \in V - C, v \in C\}$. Legyen $D' := (C \cup T + s, A')$, ahol $A' = E(D[C + s]) \cup \{t_{uv}v, (r(\varrho_s(P(C))) - r(\varrho_s(P(u)))) \cdot vt_{uv}, r(\varrho_s(P(u))) \cdot st_{uv} : t_{uv} \in T\}$ (egy e elre es k természetes számra $k \cdot e$ azt jelenti hogy e-nek k db párhuzamos példányát vesszük). Definiáljuk az M' matroidot D gyökérélein: $\varrho_s(C)$ élein vegyük M megszorítását és képezzük a t_{uv}-be menő új gyökérélekre az u-t tartalmazó T_i^1 fenyők gyökéréleit úgy, hogy ha egy $u \in V - C$-ből több él is megy C-be az eredeti gráfban, akkor az ezekhez az élekhez tartozó T-beli csúcsokba menő új gyökérélek azonos e_i^1 élhez rendelt példányai legyenek párhuzamosak. Lássuk be, hogy D' M'-alapú fenyőpakolásai összerakhatók a $T_1^1, \ldots, T_q^1$ fenyőkkel úgy, hogy D egy M-alapú pakolását kapjuk.
4. Lássuk be, hogy ha D-ben teljesül a 4. Tétel feltétele, akkor D'-ben teljesül a 3. Tétel feltétele.
5. Lássuk be az erősen összeföggő komponensekre vett indukcióval a tételt.

Megjegyzendő, hogy az említett tételek mind az erős Edmonds tétel [3] általánosításai. Definiáljuk ugyanis a gyökéréleken a következő partíciós matroidot: $\{B_1, \ldots, B_k\}$ legyen a partíció és a korlát minden i-re 1. Ekkor meggondolható, hogy ha az 1. Tétel feltételei teljesülnek, akkor a 3. Tétel feltételei is és az utóbbi tétel által adott fenyőpakolás pont k éldiszjunkt feszítőfenyőt jelent.

3 További tervek

[1] több fenyőpakoláshoz kapcsolódó tételt kimond, ezek közül az első:

Tétel 5. *(Frank, Bérczi [1]) Legyen* $D = (V, A)$ *egy* n *csúcsú digráf és legyenek* $\mu_1, \ldots, \mu_k$ *pozitív egész számok. Pontosan akkor létezik D-ben k darab éldiszjunkt feszítőfenyves* $B_1, \ldots, B_k$*, amikre* $|B_i| = \mu_i/$ *minden* $i = 1, \ldots, k$*-ra, ha* $\sum_{i=1}^q \varrho(V_i) \geq \sum_{j=1}^k max(0, q - (n - \mu_j))$ *minden* $\{V_1, \ldots, V_q\}$ *szubpartíciójára V-nek.*

Ezen tételek mintájára szeretnénk karakterizálni, hogy mikor lehet egy új s csúcsból gyökéréleket behúzni, és az élekre egy adott M matroidot leképezni, hogy létezzen a tételekben előírt feltételeknek megfelelő M-alapú s-fenyő pakolás. Mivel egy s-fenyőben lévő gyökérélek száma meghatározza a gyökérélek elhagyásával kapott fenyves méretét, ezért ha a matroidunk az előző szekció végén leírt partíciós matroid, akkor megkapjuk az 5. Tételt.

Hivatkozások

[1] Kristóf Bérczi and András Frank. Supermodularity in unweighted graph optimization i: Branchings and matchings. *Mathematics of Operations Research*, 43(3):726–753, 2018.

[2] Olivier Durand de Gevigney, Viet-Hang Nguyen, and Zoltán Szigeti. Matroid-based packing of arborescences. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27(1):567–574, 2013.

[3] Jack Edmonds. Edge-disjoint branchings. *Combinatorial algorithms*, 1973.

[4] Florian Hörsch and Zoltán Szigeti. Reachability in arborescence packings. *Discrete Applied Mathematics*, 320:170–183, 2022.

[5] Naoyuki Kamiyama, Naoki Katoh, and Atsushi Takizawa. Arc-disjoint in-trees in directed graphs. *Combinatorica*, 29(2):197–214, 2009.

[6] Csaba Király. On maximal independent arborescence packing. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 30(4):2107–2114, 2016.