

Véges projektív síkok keresése SAT-solverrel

Önálló projekt, szakmai gyakorlat I.

Dankó Dorottya

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar
Alkalmazott matematikus MSc

Témavezető: Damásdi Gábor

2022. december 19.

Véges projektív síkok

Definíció

Adott pontoknak és egyeneseknek egy-egy halmaza, továbbá egy illeszkedési reláció, ami meghatározza, hogy melyik pont melyik egyenesre illeszkedik. Azokat a struktúrákat nevezzük q -rendű véges projektív síknak, ahol

- az egyenesek és a pontok száma egyaránt $q^2 + q + 1$,
- bármely két egyenesnek létezik egy egyértelmű metszéspontja,
- bármely két ponthoz egyértelműen létezik egy egyenes, amely mindkettőre illeszkedik,
- minden egyenes pontosan $q + 1$ pontot tartalmaz,
- minden pontra pontosan $q + 1$ egyenes illeszkedik.

Kérdés: milyen q -ra létezik?

Ismert eredmények

Milyen q -ra létezik? Prímhatvány rendűekre igen. (Pl. Fano-sík)

Bruck-Ryser-tétel

Ha q egy véges projektív sík rendje és $q \equiv 1$ vagy $2 \pmod{4}$, akkor q két egész szám négyzetének az összege.

Lam (1991): Nem létezik 10-rendű.

Sejtés

Ha q egy véges projektív sík rendje, akkor q prímhatvány.

SAT-solverek

- SAT-probléma: adott logikai formula kiértékelhető-e. NP-teljes.
- SAT-solver: olyan program, ami megold egy SAT-feladatot
- Pythonban PySAT könyvtár, Glucose3 solver

A feladat átfogalmazása

- incidenciamátrix alak: sorok \leftrightarrow egyenesek, oszlopok \leftrightarrow pontok
- a mátrix mérete $(q^2 + q + 1) \times (q^2 + q + 1)$
- minden sorban pontosan $q + 1$ db egyes legyen
- minden oszlopban pontosan $q + 1$ db egyes legyen
- nincs a mátrixban 2 olyan i, j oszlop és k, l sor, amelyekre $a_{ik} = a_{il} = a_{jk} = a_{jl} = 1$.
- minden mátrixelemnek megfelel egy logikai változó, $1 \leftrightarrow$ igaz, $0 \leftrightarrow$ hamis
- egy konjunktív normálformába írjuk a feltételeket, ez lesz az inputja a solvernek

Szimmetriatörés, ciklikus projektív sík

Szimmetriatörés: az első sor és első $q + 2$ oszlop alakját előre meghatározzuk

Ciklikus projektív sík

- Ciklikus: az incidenciamátrix $i + 1$ -edik sora az i -ediknek az eltoltja
- mátrix helyett csak egy sor, $q^2 + q + 1$ változó
- $q + 1$ db 1-es legyen
- ne legyen olyan k , hogy van két változópár, amik tagjai egymástól k távolságra vannak és mind igaz értéket vesznek fel

Eredmények

- Általános alakú esetben 2, 3, 4, 5-rendűeket találtunk.
- Ciklikus esetben: 13-ig minden prímszámú rendre találtunk, $q = 6$ -ra hamis értékkel tért vissza
- Folytatási lehetőség: ortogonális latin négyzetek