Név: **Gálffy Veronika**
NEPTUN-kód: **OHUR40**
Témavezető: **Dr. Kovács Sándor**

Önálló projekt 1
Romantikus kapcsolatok modellezése differenciálegyenletekkel

Az [5] tanulmányban adott $0 < \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, A_1, A_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén az

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -\alpha_1 x + \beta_1 y + A_2 + d_1 xy =: g_1(x,y), \\ \\ \dot{y} & = & -\alpha_2 y + \beta_2 x + A_1 + d_2 xy =: g_2(x,y) \end{array}\right\} \tag{1}$$

közönséges autonóm differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi helyzeteinek stabilitását tanulmányozták, ahol az egyes paraméterek jelentése a következő:

- az α_1, α_2 paraméterek jelentik az elfelejtés ('oblivion') folyamatát;
- a β_1, β_2 paraméterek a másik személy érzelmeire való reakciót jelölik;
- az A_i paraméter az i-edik személy attraktivitását ('appeal') jelenti $(i \in \{1,2\})$;
- a d_i $(i \in \{1,2\})$ paraméterek a felek összeszokását (adaptációját) mérik,

továbbá $x(t)$ jelöli az egyik személy érzelmeinek mértékét, $y(t)$ pedig a másikét a t időpillanatban.

Az (1) rendszer egyensúlyi helyzetei az $\{\dot{x} = 0, \dot{y} = 0\}$ egyenletrendszer megoldásával kaphatók meg. Ha

$$\left.\begin{array}{rcl} m & := & 2(\beta_1 d_2 + \alpha_2 d_1), \\ n & := & 2(\beta_2 d_1 + \alpha_1 d_2), \\ D & := & -4(\alpha_2 A_2 + A_1 \beta_1)(\beta_2 d_1 + \alpha_1 d_2) + (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 - A_1 d_1 + A_2 d_2)^2, \\ p & := & A_1 d_1 - A_2 d_2, \\ q & := & \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2, \end{array}\right\} \tag{2}$$

akkor (vö. 1. ábra)

1. a $D < 0$ esetben az (1) rendszernek nincsen egyensúlyi helyzete;
2. a $D = 0$ esetben az (1) rendszernek egyetlen egyensúlyi helyzete van:
$$E_* := \left(\frac{-p-q}{n}, \frac{p-q}{m} \right);$$
3. a $D > 0$ esetben az (1) rendszernek két egyensúlyi helyzete van:
$$E_+ = \left(\frac{-p-q+\sqrt{D}}{n}, \frac{p-q+\sqrt{D}}{m} \right) \qquad \text{és} \qquad E_- = \left(\frac{-p-q-\sqrt{D}}{n}, \frac{p-q-\sqrt{D}}{m} \right).$$

Megjegyezzük, hogy az [5] tanulmányban az egyensúlyi helyzet számolását elrontották: a két létező egyensúlyi helyzet helyett – egy apró számolási hiba folytán – négyet véltek felfedezni. Az [5]-beli lokális stabilitásvizsgálat sem korrekt.

Mivel $\mathbf{g} = (g_1, g_2) \in \mathfrak{C}^1$, ezért teljesülnek a lokális egzisztencia és unicitási tételek: az (1) rendszerre vonatkozó kezdetiérték-feladatnak pontosan egy megoldása van. Amennyiben az (1) rendszer nem robban fel, (1) valamely E egyensúlyi helyzetének stabilitására elégséges feltételt szolgáltat az $\mathfrak{A} := \mathbf{g}'(E)$ Jacobi-mátrix Hurwitz-stabilitása: az $\mathfrak{A}$ mátrix sajátértékei a $\mathbb{C}^-$ baloldali nyílt félsíkban helyezkedjenek el. Ez azzal egyenértékű, hogy a $\chi_{\mathfrak{A}}(z) := z^2-$

$\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})z + \det(\mathfrak{A})$ $\quad (z \in \mathbb{C})$ karakterisztikus polinom Hurwitz-stabilis, azaz $\det(\mathfrak{A}) > 0$ és $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) < 0$ teljesül.
Az (1) rendszer jobb oldalának Jacobi-mátrixa nem más, mint

$$\mathbf{g}'(x,y) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 + d_1 y & \beta_1 + d_1 x \\ \beta_2 + d_2 y & -\alpha_2 + d_2 x \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Könnyen látható, hogy ha $l := \sqrt{D}$, úgy az

- $E = E_*$ esetben $\det(\mathfrak{A}_*) = 0$, ill.
$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_*) = -(\alpha_1 + \alpha_2) + d_1 \cdot \frac{p-q}{n} - d_2 \cdot \frac{p+q}{m};$$
- $E = E_+$ esetben $\det(\mathfrak{A}_+) = -l$ ill.
$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_+) = -(\alpha_1 + \alpha_2) + d_1 \cdot \frac{p-q+l}{n} + d_2 \cdot \frac{l-p-q}{m};$$
- $E = E_-$ esetben $\det(\mathfrak{A}_-) = l$, ill.
$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_-) = -(\alpha_1 + \alpha_2) - d_1 \cdot \frac{p+q+l}{n} + d_2 \cdot \frac{p-q-l}{m}.$$

Mivel az $\mathfrak{A}_*$ mátrix egyik sajátértéke zérus, ezért a linearizálásos technikával nem dönthető el az E_* egyensúlyi helyzet stabilitása: E_* lehet stabilis és labilis is. Mivel ebben az esetben az $\mathfrak{A}_*$ mátrixnak egyetlen nem-zérus sajátértéke van: $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_-)$, ezért a stabilitáshoz szükséges a

$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_-) < 0, \qquad \text{azaz} \qquad -q < p < q$$

feltétel teljesülése.
Könnyen belátható, hogy igazak az alábbi tételekben megfogalmazott állítások.

Tétel (vö. [4]). Ha az (1) rendszer nem robban fel, $D > 0$, akkor az E_+ egyensúlyi helyzet nem stabilis (labilis).

Biz. A tétel feltételeinek fennállása esetén E_+ hiperbolikus egyensúlyi helyzet, ui.

$$\det(\mathfrak{A}_+) = -l < 0,$$

így a Hartman-tétel következtében E_+ (labilis) nyeregpont. ■

Most megvizsgáljuk az E_- egyensúlyi helyzet lokális stabilitását. Mivel

$$\det(\mathfrak{A}_-) = l > 0,$$

ezért a

$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_-) < 0.$$

esetben E_- lokálisan aszimptotikusan stabilis. A nyomfeltétel teljesül, ha

$$p - q - l < 0 \qquad \text{és} \qquad p + q + l > 0.$$

Tétel (vö. [4]). A fázissík első negyedében az (1) rendszernek nincsen nemtriviális periodikus megoldása.

Biz. Alkalmazva a Bendixson-Dulac-kritériumot a

$$h(x,y) := \frac{1}{xy} \qquad (x,y > 0)$$

Dulac-függvénnyel

$$\mathrm{div}(h\mathbf{g})(x,y) = -\frac{\beta_1}{x^2} - \frac{A_2}{x^2 y} - \frac{\beta_2}{y^2} - \frac{A_2}{xy^2} < 0 \qquad (x,y > 0) \tag{3}$$

adódik. ■

Hivatkozások

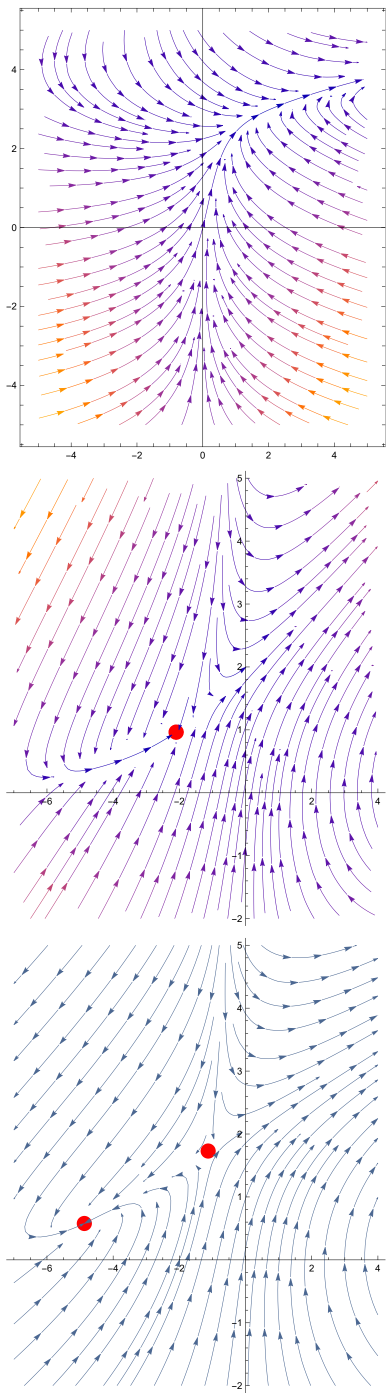
[1] Farkas, M.: *Dynamical Models in Biology*, Academic Press, New York-Heidelberg, 2001.

[2] Rinaldi, S.; Della Rossa, F.; Dercole, F.; Gragnani, A.; Landi, P.: *Modeling Love Dynamics*, Scientific Series on Nonlinear Science Series A 89, World Scientific, New Jersey, 2016.

[3] Sergio, R.; Gragnani, A.: *Love dynamics between secure individuals: A modeling approach*, Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences, (1998), 283–301.

[4] Kovács, S.; Gállfy, V.: *On the Dynamics of Love: Stability and Bifurcations*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, (2022), (in preparation).

[5] Satasangi, D.; Sinha, A. K.: *Dynamics of Love and happiness: A Mathematical Analysis*, Journal of Modern Educations and Computer Science, **5** (2012), 31–37.



1. ábra. Az (1) rendszer fázisportréja, ill. egyensúlyi helyzetei a $D < 0$, a $D = 0$ és a $D > 0$ esetben.