Romantikus kapcsolatok modellezése differenciálegyenletekkel

Gálffy Veronika

Témavezető: Dr. Kovács Sándor

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2022. december 22.

A modell

Az [5] tanulmányban adott $0 < \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, A_1, A_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén az

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha_1 x + \beta_1 y + A_2 + d_1 xy =: g_1(x,y), \\ \dot{y} &= -\alpha_2 y + \beta_2 x + A_1 + d_2 xy =: g_2(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

közönséges autonóm differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi helyzeteinek stabilitását tanulmányozták.

- α_1, α_2: elfelejtés, 'oblivion'
- β_1, β_2: másik személy érzelmeire adott reakció
- A_1, A_2: appeal
- d_1, d_2: a felek összeszokása, adaptáció

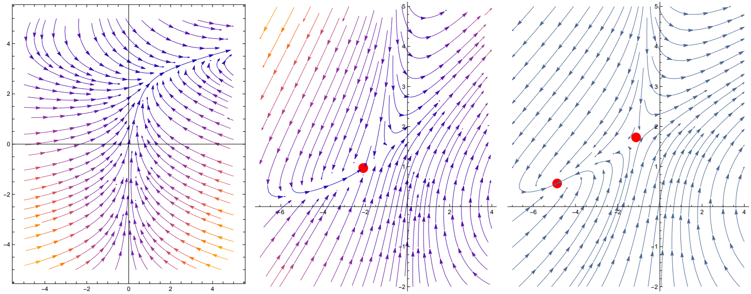
Egyensúlyi helyzetek

Az (1) rendszer egyensúlyi helyzetei az $\{\dot{x} = 0, \dot{y} = 0\}$ egyenletrendszer megoldásával kaphatók meg. Ha

$$
\left.
\begin{array}{lcl}
m & := & 2(\beta_1 d_2 + \alpha_2 d_1), \\
n & := & 2(\beta_2 d_1 + \alpha_1 d_2), \\
D & := & -4(\alpha_2 A_2 + A_1 \beta_1)(\beta_2 d_1 + \alpha_1 d_2) + \\
  &   & +(\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 - A_1 d_1 + A_2 d_2)^2, \\
p & := & A_1 d_1 - A_2 d_2, \\
q & := & \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2,
\end{array}
\right\} \qquad (2)
$$

akkor

1. a $D < 0$ esetben az (1) rendszernek nincsen egyensúlyi helyzete;
2. a $D = 0$ esetben az (1) rendszernek egyetlen egyensúlyi helyzete van:
$$E_* := \left(\frac{-p-q}{n}, \frac{p-q}{m}\right);$$
3. a $D > 0$ esetben az (1) rendszernek két egyensúlyi helyzete van:
$$E_+ = \left(\frac{-p-q+\sqrt{D}}{n}, \frac{p-q+\sqrt{D}}{m}\right)$$
és
$$E_- = \left(\frac{-p-q-\sqrt{D}}{n}, \frac{p-q-\sqrt{D}}{m}\right).$$



Amennyiben az (1) rendszer nem robban fel, (1) valamely E egyensúlyi helyzetének stabilitására elégséges feltételt szolgáltat az $\mathfrak{A} := \mathrm{g}'(E)$ Jacobi-mátrix Hurwitz-stabilitása, azaz

$$\det(\mathfrak{A}) > 0 \qquad \text{és} \qquad \mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) < 0.$$

Az (1) rendszer jobb oldalának Jacobi-mátrixa:

$$\mathrm{g}'(x,y) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 + d_1 y & \beta_1 + d_1 x \\ \beta_2 + d_2 y & -\alpha_2 + d_2 x \end{bmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Tétel ([4]). Ha az (1) rendszer nem robban fel, $D = 0$, akkor az E_* csak akkor lehet stabilis, ha fennáll a

$$-q < p < q$$

egyenlőtlenségpár.

Biz. Mivel ebben az esetben az $\mathfrak{A}_*$ mátrixnak egyetlen nem-zérus sajátértéke van: $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_-)$, ezért a stabilitáshoz szükséges a

$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_-) < 0, \qquad \text{azaz a} \qquad -q < p < q$$

feltétel teljesülése. ■

Az E_+ egyensúlyi helyzet stabilitása

Tétel ([4]). Ha az (1) rendszer nem robban fel, $D > 0$, akkor az E_+ egyensúlyi helyzet nem stabilis (labilis).

Biz. A tétel feltételeinek fennállása esetén E_+ hiperbolikus egyensúlyi helyzet, ui.

$$\det(\mathfrak{A}_+) = -I < 0,$$

így a Hartman-tétel következtében E_+ (labilis) nyeregpont. ■

Az E_- egyensúlyi helyzet stabilitása

Tétel ([4]). Ha az (1) rendszer nem robban fel, $D > 0$, akkor az E_- egyensúlyi helyzet aszimptotikus stabilitására elégséges feltétel a következő:

$$p - q - l < 0 \qquad \text{és} \qquad p + q + l > 0.$$

Mivel

$$\det(\mathfrak{A}_-) = l > 0,$$

ezért a

$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_-) < 0.$$

esetben E_- lokálisan aszimptotikusan stabilis. A nyomfeltétel teljesül, ha

$$p - q - l < 0 \qquad \text{és} \qquad p + q + l > 0.$$

Periodikus megoldás létezése az első síknegyedben

Tétel ([4]). A fázissík első negyedében az (1) rendszernek nincsen nemtriviális periodikus megoldása.

Biz. Alkalmazva a Bendixson-Dulac-kritériumot a

$$h(x, y) := \frac{1}{xy} \qquad (x, y > 0)$$

Dulac-függvénnyel

$$\operatorname{div}(h(g_1, g_2))(x, y) = -\frac{\beta_1}{x^2} - \frac{A_2}{x^2 y} - \frac{\beta_2}{y^2} - \frac{A_2}{xy^2} < 0 \qquad (x, y > 0) \tag{3}$$

adódik. ■

Köszönöm a figyelmet!

- Farkas, M.: *Dynamical Models in Biology*, Academic Press, New York-Heidelberg, 2001.
- Rinaldi, S.; Della Rossa, F.; Dercole, F.; Gragnani, A.; Landi, P.: *Modeling Love Dynamics*, Scientific Series on Nonlinear Science Series A 89, World Scientific, New Jersey, 2016.
- Sergio, R.; Gragnani, A.: *Love dynamics between secure individuals: A modeling approach*, Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences, (1998), 283–301.
- Kovács, S.; Gállfy, V.: *On the Dynamics of Love: Stability and Bifurcations*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, (2022), (in preparation).
- Satasangi, D.; Sinha, A. K.: *Dynamics of Love and happiness: A Mathematical Analysis*, Journal of Modern Educations and Computer Science, **5** (2012), 31–37.