Önálló projektfeladat - Kúpszeletek és alkalmazásaik III.

Fazekas Illés

December 20, 2022

Ebben a félévben a leendő diplomamunka szerves részét képező kúpszeletsorok vizsgálatának előkészítéséhez elengedhetetlen alapot nyújtó körsorok felépítésével foglalkozunk - alapvetően analitikus tárgyalásban - melyen körsorok tulajdonképpen speciális kúpszeletsoroknak tekinthetők, és bizonyos tulajdonságaik öröklődnek általános kúpszeletsorokra, segítik azok megértését.

Pont körre vonatkozó hatványa

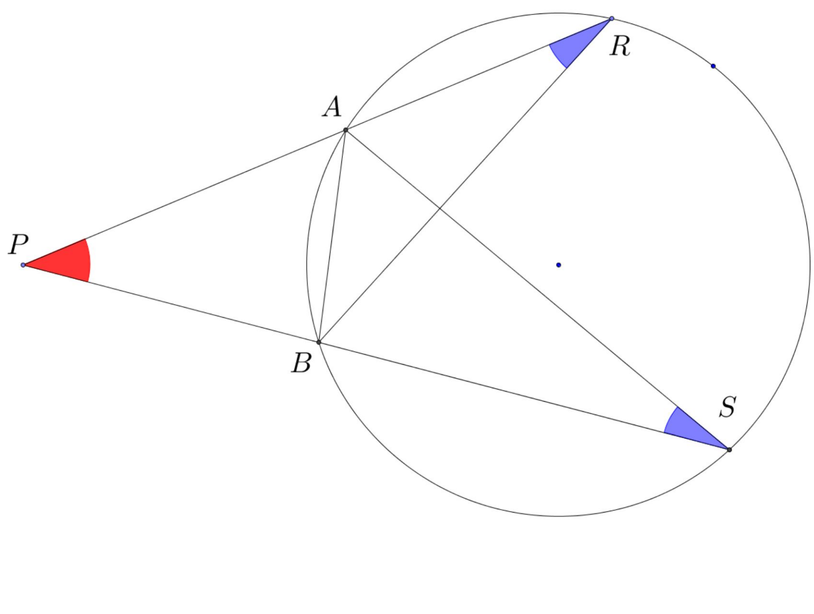
Bevezetőül tekintsük a következő tételt, melynek segítségével majd definiálhatjuk pont körre vonatkozó hatványát:

Tétel 0.1 *Ha a sík egy adott P pontjából szelőt húzunk egy fix körhöz, akkor a ponttól a metszéspontokig terjedő szakaszok szorzata független a szelő megválasztásától.*

Bizonyítás Oly módon fogjuk bebizonyítani a tételt, hogy igazoljuk, hogy tetszőleges két szelő esetén ez a szorzat megegyezik.

Tegyük fel, hogy P illeszkedik a körre. Ekkor a P-n áthaladó szelődarabok 0 hosszúságúak, így a darabok szorzata is 0, a tétel triviálisan igaz.

Feküdjön most P a körön kívül, és a két P-n áthaladó szelő messe a kört az A, B, R, és S pontokban, ahogyan az alábbi ábra mutatja.



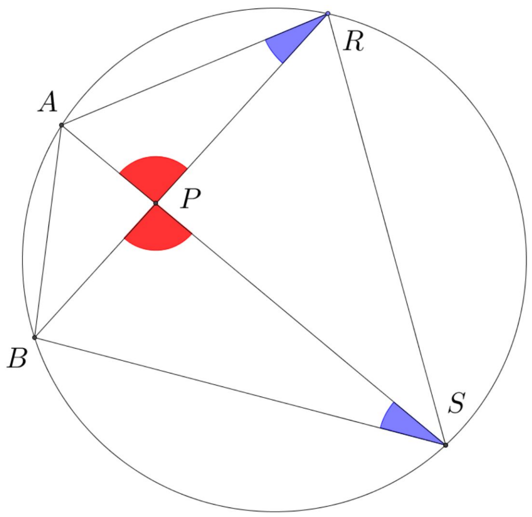
Ekkor $\angle ARB = \angle ASB$, mivel mindketten az AB ív azonos oldalán nyugvó kerületi szögek. A PBR és PAS háromszögek osztoznak az $\angle APB$ szögön, valamint megegyeznek egy további szögpárban, így összes szögük megegyezik, tehát hasonlók. Ennek megfelelően

$$\frac{PA}{PS} = \frac{PB}{PR},$$

amit átszorozva kapjuk, hogy

$$PA \cdot PR = PB \cdot PS.$$

Helyezkedjen el P a kör belsejében az ábrán látható módon:



Ez esetben a fentihez hasonló érvelés mentén kapjuk, hogy PAR és PBS háromszögek hasonlók, amiből:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PR}{PS},$$

melyet rendezve kapjuk, hogy

$$PA \cdot PS = PB \cdot PR.$$

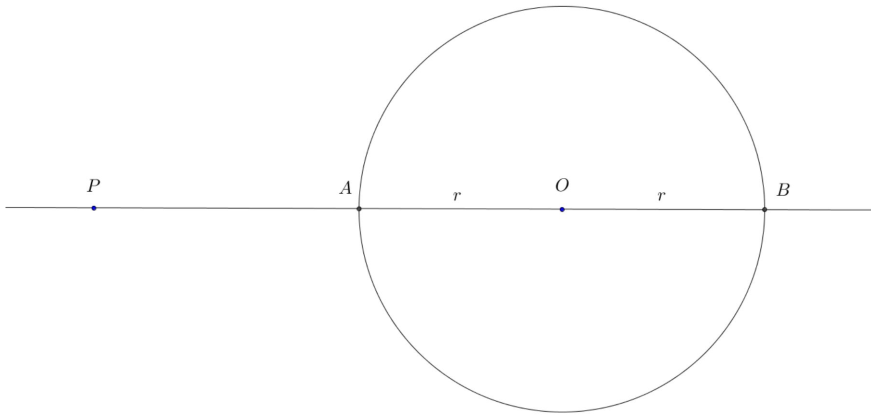
Definíció 0.2 *A fentiek értelmében a szelődarabok szorzata csak a ponttól és a körtől függő konstans, ezen konstanst elnevezzük a pont körre vonatkozó hatványának.*

Meggondolható, hogy a fenti tétel irányított szakaszhosszokra is érvényes, melynek értelmében egy pont körre vonatkozó hatványa külső pont esetén pozitív, belső pont esetén negatív, körön fekvő pont esetén pedig 0.

Az alábbiakban megmutatjuk a hatvány két új karakterizációját:

Tétel 0.3 *A P pont O középpontú, r sugarú körre vonatkozó hatványa $d^2 - r^2$, ahol $PO = d$.*

Bizonyítás Tekintsünk azt a speciális szelőt, amely áthalad a kör középpontján:

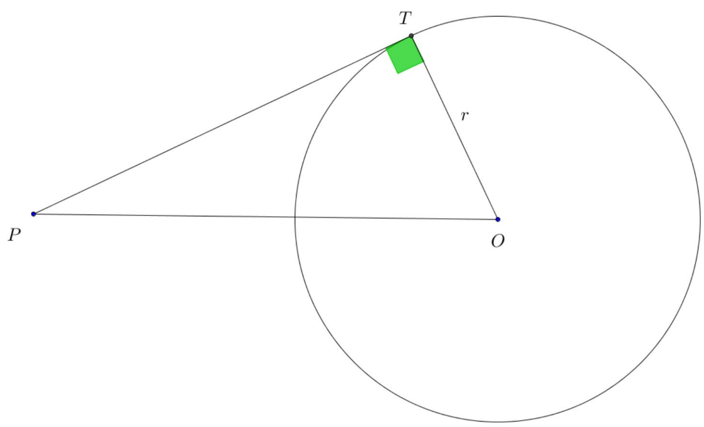


A távolságokat előjellel figyelembe véve $PO = d$, $OA = -r$, $OB = r$, azaz $PA = d-r$, $PB = d + r$, a hatvány pedig:

$$PA \cdot PB = (d + r)(d - r) = d^2 - r^2.$$

Tétel 0.4 *Körön kívül fekvő pont hatványa a körre nézve éppen a belőle a körhöz húzott érintőszakasz négyzete. Megjegyezzük, hogy ez egy újabb bizonyítását adja annak, hogy külső pont hatványa pozitív.*

Bizonyítás Tekintsük továbbra is az O középponton áthaladó szelőt, és érintse a P-ből húzott érintő a kört a T talppontban.



Ismert, hogy az érintő az érintési pontban merőleges a sugárra, így felírhatjuk Pythagoras tételét a PTO háromszögben:

$$PT^2 = PO^2 - TO^2 = d^2 - r^2,$$

ami az előző tétel értelmében éppen a hatvány.

Definíció 0.5 *Kiegészítésképp definiáljuk a P pontnak egy elfajuló C körre (pontkörre) vonatkozó hatványát $CP^2 = d^2$-ként összhangban a fenti definícióval abban a határhelyzetben, amikor a kör sugara* 0.

Térjünk át a hatvány analitikus geometriai megközelítésére, melyhez tekintsük az $O(u, v)$ középpontú, r sugarú kör K normálegyenletét:

$$K: \ (x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2 = 0.$$

A sík $P(a, b)$ pontját visszaírva az egyenletbe éppen a hatványt kapjuk:

$$K(P) = (a-u)^2 + (b-v)^2 - r^2 = PO^2 - r^2 = d^2 - r^2.$$

Hatványvonal

Definíció 0.6 *Azon pontok mértani helyét a síkon, melyeknek két fix körre vonatkozó hatványa megegyezik, a két kör hatványvonalának nevezzük. Később látni fogjuk, hogy ez valóban egy egyenes.*

Két koncentrikus kör esetén ez a halmaz üres, ugyanis ugyanannak a pontnak két koncentrikus körre vonatkozó hatványa sohasem egyenlő, mivel $d^2 - r_1^2 = d^2 - r_2^2$ csak akkor teljesülne, ha $r_1 = r_2$ állna fent, de ez különböző körök esetén nem igaz.

Tétel 0.7 *Két nemkoncentrikus kör hatványvonala egyenes.*

Bizonyítás Analitikus megközelítésünk értelmében a $K_1 = 0$ és $K_2 = 0$ normálegyenletű körök hatványvonalára azok a P pontok illeszkednek, amelyekre

$$K_1(P) = K_2(P),$$

azaz kielégítik a

$$K_1 - K_2 = 0$$

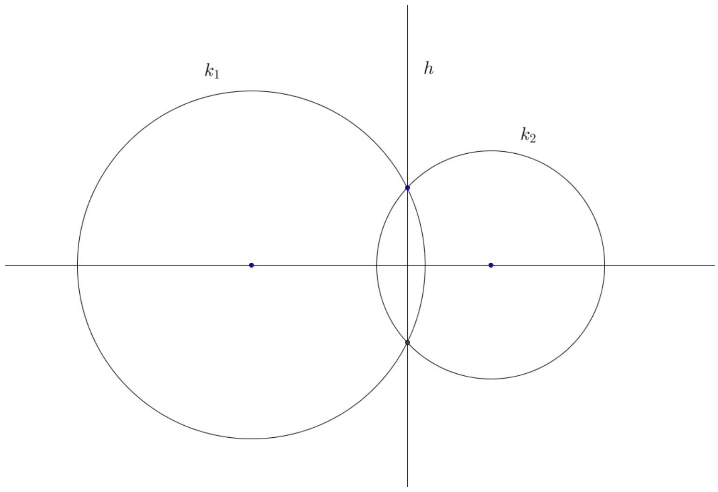
egyenletet. A fenti kifejezés tehát a hatványvonal egyenlete. Mivel K_1-ben és K_2-ben a másodfokú tagok együtthatója egyaránt 0, ezek kiejtik egymást, ezért a hatványvonal egyenlete lineáris vagy konstans. Viszont ha állandó lenne, akkor a körök K_1, $K_1 + c$ alakúak lennének, azaz koncentrikusak, de feltettük, hogy nem azok, tehát a kifejezés lineáris, azaz egyenes egyenlete, így a hatványvonal szükségképpen egyenes.

Tétel 0.8 *Ha két körnek van közös pontja, akkor az a hatványvonalukon fekszik.*

Bizonyítás A közös pont illeszkedik mindkét körre, ezért a korábbiak miatt mindkét körre vonatkozó hatványa 0, azaz illeszkedik a hatványvonalra.

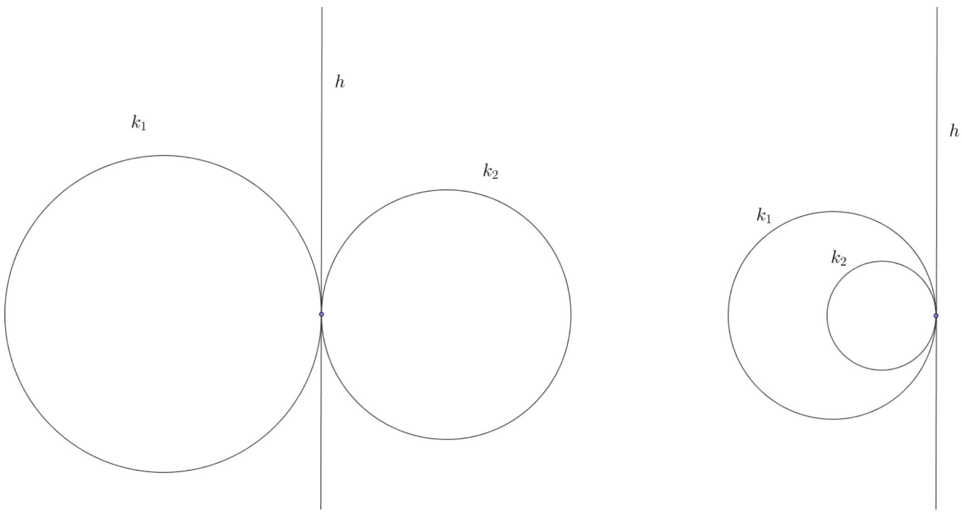
Ennek egy következménye, hogy metsző körök hatványvonala a metszéspontokat összekötő egyenes. Ezt általánosítja némileg a következő tétel:

Tétel 0.9 *Két kör hatványvonala merőleges a középpontjaikat összekötő centrális egyenesükre, ahogy az alábbi ábra is mutatja.*



Bizonyítás Egy pontot a két kör centrálisára tükrözve olyan pontot kapunk, melynek mindkét körre vonatkozó hatványa megegyezik az eredeti pontéval, mivel a tükrözés - lévén, hogy a középpontok illeszkednek a tükörtengelyre - a középpontoktól való távolságot fixen hagyja. Eszerint a hatványvonal tetszőleges pontját a centrálisra tükrözve ismét a hatványvonal egy pontját kapjuk, tehát a hatványvonal a centrálisra nézve szimmetrikus. Ilyen helyzetűek csak a centrálisra merőleges egyenesek vagy a centrális maga lehetnek. Innen elegendő igazolni, hogy a centrális maga nem lehet hatványvonal. Ehhez elég megmutatni, hogy létezik olyan pont a centrálison, amelyik nem fekszik a hatványvonalon. Ilyet könnyű találni, hiszen a centrálisnak van olyan pontja, amelyik egyszerre az egyik kör belsejéhez és a másik kör külsejéhez tartozik, így hatványuk különböző előjelű. Eszerint csak a centrálisra ortogonális egyenesek közül kerülhet ki a hatványvonal.

Jelen és előző tételek direkt következménye, hogy érintő körpár hatványvonala megegyezik a közös érintőegyenesükkel, valamint speciálisan körnek és ráilleszkedő pontkörnek a hatványvonala a kör ezen pontbeli érintőegyenese, lsd. alább.



A továbbiakban megvizsgáljuk, hogyan viselkedik a hatványvonal három kör esetén.

Tétel 0.10 *Ha három kör között nincs két koncentrikus, akkor hatványvonalaik egy sugársorhoz tartoznak.*

Bizonyítás Ha nincs a körök között két koncentrikus, azok $\binom{3}{2} = 3$ hatványvonalat határoznak meg. Legyen a három kör normálegyenlete rendre $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, valamint $K_3 = 0$. Ez alapján hatványvonalaik egyenletei:

$$K_1 - K_2 = 0,\ K_2 - K_3 = 0,\ K_3 - K_1 = 0.$$

Mivel a baloldalak összege 0, ezek egy egy ponton áthaladó egyenessereget feszítenek ki, vagy pedig párhuzamosak, ezért egy sugársorhoz tartoznak.

Tétel 0.11 *Ha három kör középpontjai nem kollineárisak, akkor egyértelműen létezik egy pont, melyre nézve mindhárom körnek ugyanaz a hatványa. Ezt a pontot nevezzük a három kör hatványpontjának.*

Bizonyítás Mivel a három középpont nincs egy egyenesen, ezért nincs köztük két megegyező sem, azaz a három kör nem tartalmaz koncentrikus körpárt. Az előzők fényében ekkor a hatványvonalak egy sugársorhoz tartoznak, azaz egy közös ponton haladnak át, vagy párhuzamosak. Ha ki tudjuk zárni a párhuzamosságot, azzal igazoljuk, hogy a hatványvonalak konkurrensek, márpedig ez kizárható, hiszen a három hatványvonal merőleges a körök centrálisaira, amelyek egy nemelfajuló háromszög oldalegyenesei, mivel a centrumok nem kollineárisak, azaz szükségképpen a hatványvonalak nem lehetnek egyező állásúak, következésképp egy ponton haladnak át.

Megjegyezzük, hogy ha centrumok egy egyenesre illeszkednek, akkor a hatványvonalak a közös centrálisra merőleges, egymással párhuzamos egyenesek, ilyenkor nem beszélhetünk hatványpontról.

Körsorok

Definíció 0.12 *Legyen $K_1 = 0$ és $K_2 = 0$ két kör vagy egy egyenes és egy kör egyenlete, de ne legyen mindkettő egyenesé. Tekintsük azokat az alakzatokat, melyek kielégítik a*

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$$

egyenletet, ahol λ_1, λ_2 befutja $\mathbb{R}$-et. Ezen alakzatok összességét a $K_1 = 0$ és $K_2 = 0$ alakzatok által meghatározott körsornak nevezzük, a (λ_1, λ_2) számpárok által meghatározott individuális alakzatokat pedig a körsör elemeinek kereszteljük el.

Nyilvánvalóan látszik, hogy a meghatározó alakzatok maguk is elemei a körsornak. A fenti egyenlet bal oldala olyan kvadratikus kifejezés, amelyben x^2 és y^2 együtthatója ugyanakkora (akár 0), így a körsor minden eleme kör vagy egyenes. Megjegyezzük, hogy tágabb értelemben az egyenesek is tekinthetők a végtelenen áthaladó köröknek, így a körsoroknál időnként az egyszerűség kedvéért alapkörként hivatkozunk akár egy egyenesre mint meghatározó alakzatra is.

Tétel 0.13 *Minden körsor legfeljebb egy egyenest tartalmaz.*

Bizonyítás Indirekt tegyük fel, hogy a körsor tartalmaz két különböző egyenest, melyek egyenlete $L_1 = 0$ és $L_2 = 0$. Eszerint valamilyen α_i, β_j együtthatókra:

$$\begin{cases} L_1 = \alpha_1 K_1 + \beta_1 K_2 \\ L_2 = \alpha_2 K_1 + \beta_2 K_2 \end{cases}$$

Mivel a két egyenes különböző, $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Viszont ilyenkor valamely γ_i, δ_j együtthatókra:

$$\begin{cases} K_1 = \gamma_1 L_1 + \beta_1 L_2 \\ K_2 = \gamma_2 L_1 + \beta_2 L_2 \end{cases},$$

de ekkor K_1 és K_2 alakzatok egyenesek lineáris kombinációi, azaz maguk is egyenesek, ami viszont ellentmond a kiindulási feltételeknek, miszerint legalább az egyik egyenlet köré.

Tétel 0.14 *A körsor bármely két eleme által egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás A bizonyítást csak vázoljuk, mivel nagyon hasonló a gondolatmenet az előző állításéhoz. A körsor két eleme előáll az alapkörök egyenleteinek lineáris kombinációjaként, de a nemelfajultság miatt hasonlóan az alapkörök is kikeverhetők a kiválasztott két kör egyenletéből, így azok ugyanarra a körsorra vezetnek.

Ennek következményeképp két különböző körsornak legfeljebb egy közös eleme lehet, hiszen ha kettő lenne, akkor ugyanazt a körsort határoznák meg.

Tétel 0.15 *Ha egy körsor két különböző elemének van metszéspontja, akkor ezt a metszéspontot a körsor összes többi eleme tartalmazza.*

Bizonyítás Legyen a K_1 és K_2 alapalakzat közös pontja P. Ez a két alakzat, mint láttuk, meghatározza a körsort, így minden rajta fekvő alakzat egyenlete

$$\alpha K_1 + \beta K_2 = 0$$

alakú. Azonban, mivel P illeszkedik K_1-re és K_2-re is, ezért

$$K_1(P) = K_2(P) = 0,$$

de ekkor

$$\alpha K_1(P) + \beta K_2(P) = 0,$$

ami azt jelenti, hogy P rajta van a körsor összes elemén.

Definíció 0.16 *Egy körsor alappontjának nevezzük azt a pontot, amelyen a körsor minden eleme áthalad.*

Tétel 0.17 *Egy körsor legfeljebb két alappontot tartalmaz.*

Bizonyítás Három pont egyértelműen kifeszít egy kört vagy egy egyenest, ezért ha egy körsornak három alappontja lenne, a körsor minden eleme ez az egy kör vagy egyenes lenne, ami ellentmond a körsor definíciójának, így egy körsornak legfeljebb két alappontja lehet.

A következő állítások összekapcsolják a körsorokat a hatványvonallal:

Tétel 0.18 *Ha egy körsor két elemének létezik hatványvonala, akkor az szintén eleme a körsornak.*

Bizonyítás Legyen a két kör normálegyenlete $K_1 = 0$ és $K_2 = 0$. Ekkor $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ választással a $K_1 - K_2$ alakzat is eleme a körsornak, amiről pedig láttuk, hogy a hatványvonal egyenletét adja.

Tétel 0.19 *A körsor tetszőleges két elemének hatványvonala megegyezik (amennyiben létezik).*

Bizonyítás Ha a körsor tartalmaz két koncentrikus kört, akkor bármely két eleme koncentrikus. Ilyen köröknek azonban nincs hatványvonala. Ennek fényében egy körsor vagy koncentrikus, vagy bármely két elemének létezik hatványvonala. Ez a hatványvonal, mint előbb láttuk, eleme a körsornak, de azt is igazoltuk, hogy egy körsor maximum egy egyenest tartalmazhat, tehát ez a körsor egyetlen egyenese, így szükségképpen ez kell, hogy legyen egy tetszőlegesen kiválasztott körpár hatványvonala is.

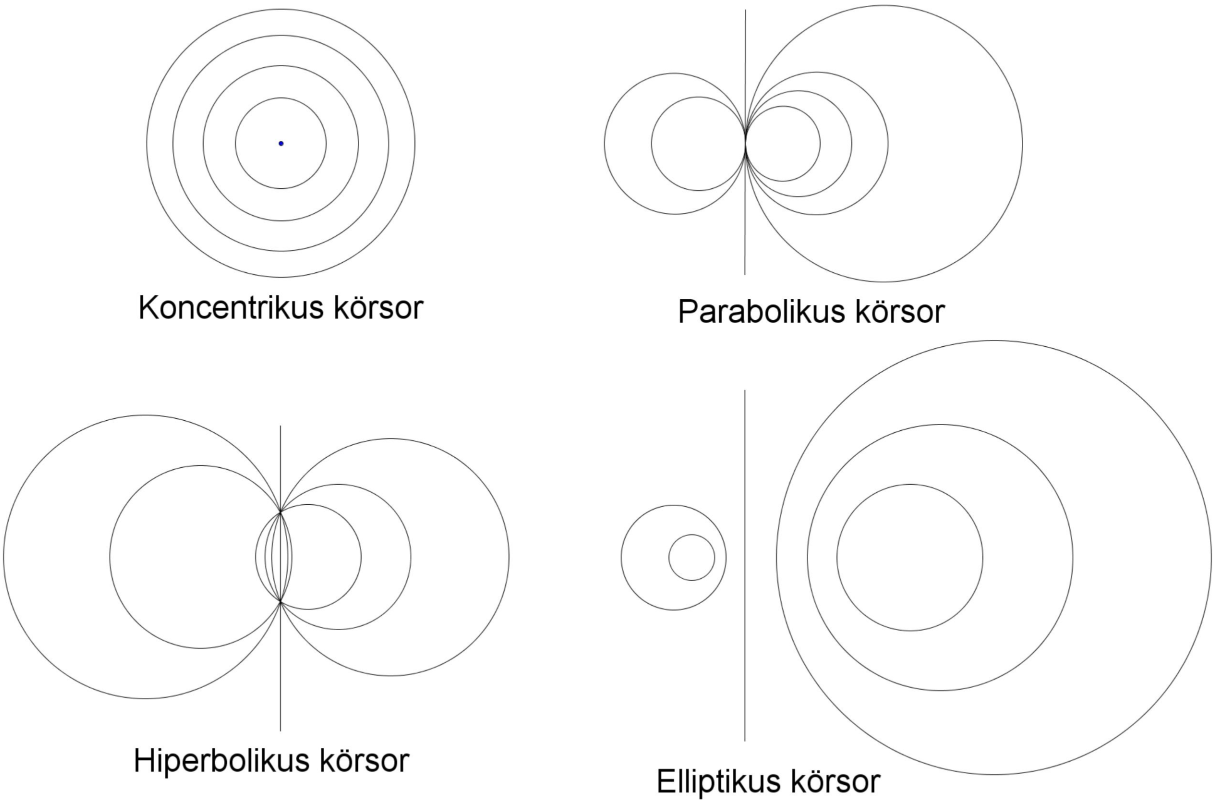
A következőkben osztályozzuk a körsorokat aszerint, hogy hány alappontjuk van, valamint hogy tartalmaznak-e egyenest, vagy sem. Egy körsor legfeljebb 2 alappontot tartalmazhat, és legfeljebb 1 egyenest.

Definíció 0.20 *Ha egy körsor nem tartalmaz egyenest, koncentrikusnak nevezzük. Az ilyen körsor nyilván alappontot sem tartalmaz, hiszen koncentrikus köröknek nincs közös pontja.*

Ha egy körsor tartalmaz egyenest, az alappontok száma szerint osztályozhatjuk.

Definíció 0.21 *Ha a körsornak* 0 *alapponjta van, elliptikusnak, ha* 1 *alapponjta van, parabolikusnak, ha* 2 *alappontja van, hiperbolikusnak nevezzük.*

A körsorok fajtáit az alábbi ábra szemlélteti:



A következőkben körsorok merőlegességét vizsgáljuk meg.

Definíció 0.22 *Két metsző kört merőlegesnek nevezünk, ha a metszéspontokban behúzott sugaraik merőlegesek.*

Tétel 0.23 *Két kör pontosan akkor merőleges egymásra, ha az egyik kör középpontjának a másik körre vonatkozó hatványa megegyezik az egyik kör sugarának négyzetével.*

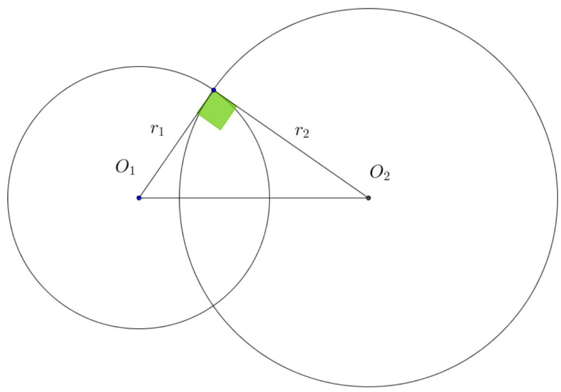
Bizonyítás Ha két kör merőlegesen metszi egymást (lsd. az alábbi ábrán), akkor a sugarak merőlegességéből adódóan Pythagoras tétele miatt

$$r_1^2 = O_1O_2^2 - r_2^3,$$

ami pontosan azt jelenti, hogy az egyik centrum hatványa a másik körre nézve r_1^2, visszafelé pedig, ha a hatvány r_1^2, akkor átrendezve kapjuk, hogy

$$r_1^2 + r_2^2 = O_1O_2^2,$$

ami Pythagoras tételének megfordítása értelmében implikálja a sugarak merőlegességét.



Tétel 0.24 *Ha egy k kör merőlegesen metszi egy körsor két elemét, akkor az összes elemét merőlegesen metszi.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy a két metszett elem két kör, $K_1 = 1$ és $K_2 = 0$ normálegyenlettel. Legyen k középpontja C, sugara r. A merőlegesség miatt $K_1(C) = K_2(C) = r^2$, de ez azt is jelenti, hogy C illeszkedik a két kör hatványvonalára, ezt egybevetve viszont egy korábbi állításunkkal, kapjuk, hogy a hatványvonal merőleges k-ra. Azonban a körsor minden körének ez a közös hatványvonala, melyre k merőleges, így k a körsor összes körére merőleges. Tegyük fel, hogy a két metszett elem egy kör és egy egyenes (több egyenes nem lehet). Ekkor ez az egyenes a hatványvonal. A merőleges metszés miatt C illeszkedik a hatványvonalra, így az összes körre vonatkozó hatványa egyenlő. Ellenben tudjuk, hogy ez a hatvány r^2, mivel a körök merőlegesen metszik egymást, tehát k merőlegesen metszi a körsor összes elemét.

Tétel 0.25 *Ha egy egyenes merőlegesen metszi egy körsor két elemét, akkor az összes többit is.*

Bizonyítás Egy egyenes pontosan akkor metsz merőlegesen egy kört, ha áthalad a centrumán. Ezért ha a két metszett elem kör, akkor a metsző egyenes egybeesik a centrumokat összekötő egyenessel, azaz merőlegesen metszi a többi kört, valamint egy korábbi állítás miatt a hatványvonalat is. Ha viszont az egyik metszett elem a hatványvonal, a másik egy kör, akkor az egyenes átmegy a kör centrumán, és merőleges a hatványvonalra, ez viszont azt jelenti, hogy áthalad a többi középponton is, tehát szükségképpen merőleges a többi körre is.

Definíció 0.26 *Két körsort konjugáltnak nevezünk, ha az egyik körsor minden eleme merőlegesen metszi a másik körsör minden elemét.*

A definíció a konjugáltságtól elvárható módon a merőlegesség miatt a körsorokra szimmetrikus módon viselkedik. A fentiek birtokában két körsor merőlegességéhez elég tudni, hogy a körsorpár két-két eleme páronként merőleges egymásra.

Konjugáltság szempontjából körsorokra a következők érdekes állítások igazak:

Tétel 0.27 *Parabolikus körsor konjugáltja ugyancsak parabolikus körsor ugyanazzal az alapponttal, és az eredeti körsor centrumai által meghatározott hatványvonallal.*

Tétel 0.28 *Hiperbolikus körsor konjugáltja olyan elliptikus körsor, melynek két pontköre az eredeti körsor két alappontja, hatványvonala pedig az eredeti körsor centrumai által kifeszített egyenes.*

Tétel 0.29 *A konjugáltság szimmetriájából adódóan elliptikus körsor konjugáltja olyan hiperbolikus körsor, amelynek alappontjai az eredeti körsor pontkörei, hatványvonala pedig ezek összekötő egyenese.*

Ezen állítások bizonyítása viszonylag könnyen meggondolható, azonban közlésüknek a dolgozat terjedelme korlátot szab.

Felhasznált irodalom

Munkám során Hajós György *BEVEZETÉS A GEOMETRIÁBA* c. könyvére, valamint Kiss György Tanár Úr előadásjegyzeteire támaszkodtam.