Önálló projektfeladat III. - Kúpszeletek és alkalmazásaik

Fazekas Illés

Alkalmazott matematikus MSc

Témavezető: Kiss György

Bevezetés

Ebben a félévben körsorokkal foglalkoztunk - főleg analitikus felépítésben - amelyek önmagukban is érdekesek, de rajtuk keresztül nagyon jól megérthetők az eggyel általánosabb kúpszeletsorok, amik majd a diplomamunka részét fogják képezni.

Pont körre vonatkozó hatványa

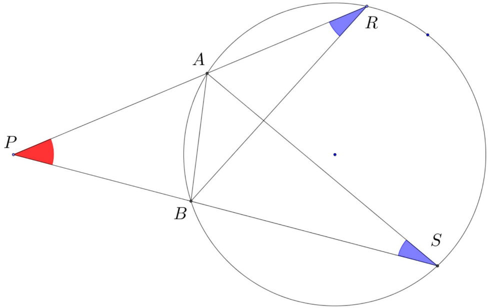
Tétel

Ha a sík egy adott P pontjából szelőt húzunk egy fix körhöz, akkor a ponttól a metszéspontokig terjedő szakaszok szorzata független a szelő megválasztásától.

Bizonyítás.

Igazoljuk, hogy tetszőleges két szelő esetén a szelődarabok szorzata megegyezik.
Ha P illeszkedik a körre, az állítás triviális, hiszen ekkor legalább az egyik szelődarab 0 hosszúságú, a szorzatuk is 0.

Ha P a körön kívül fekszik:



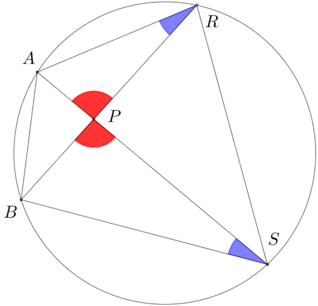
A kerületi szög tétel miatt $\angle ARB = \angle ASB$, ezért PBR és PAS háromszögek hasonlók, amiből:

$$\frac{PA}{PS} = \frac{PB}{PR},$$

azaz

$$PA \cdot PR = PB \cdot PS.$$

Ha P a körön belül fekszik:



Az előző mintájára

PAR és PBS háromszögek hasonlók, amiből:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PR}{PS},$$

melyet rendezve kapjuk, hogy

$$PA \cdot PS = PB \cdot PR.$$

Definíció

A fentiek értelmében a szelődarabok szorzata csak a ponttól és a körtől függő konstans, ezen konstanst elnevezzük a pont körre vonatkozó hatványának.

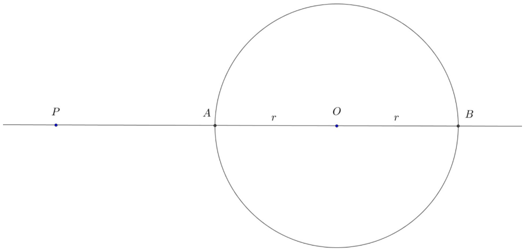
A fenti összefüggések előjellel irányított szakaszhosszokra is érvényesek, így egy pont körre vonatkozó hatványa külső pont esetén pozitív, belső pont esetén negatív, a körön fekvő pont esetén pedig 0.

Tétel

A P pont O középpontú, r sugarú körre vonatkozó hatványa $d^2 - r^2$, ahol $PO = d$.

Bizonyítás.

Tekintsük a kör középpontján áthaladó szelőt:

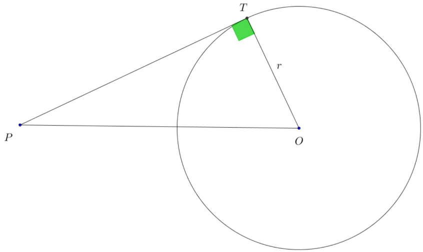


A távolságokat előjellel figyelembe véve $PO = d$, $OA = -r$, $OB = r$, azaz $PA = d - r$, $PB = d + r$, a hatvány pedig:

$$PA \cdot PB = (d + r)(d - r) = d^2 - r^2.$$

Tétel

Külső pont hatványa megegyezik a belőle a körhöz húzott érintőszakasz hossznégyzetével.



Bizonyítás.

Pytagoras tételét felírva a PTO háromszögre kapjuk:

$$PT^2 = PO^2 - TO^2 = d^2 - r^2,$$

ami a hatványt adja.

Tekintsük az $O(u, v)$ középpontú, r sugarú kör K normálegyenletét:

$$K: \ (x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2 = 0.$$

A sík $P(a, b)$ pontját behelyettesítve az egyenletbe a hatványt kapjuk:

$$K(P) = (a-u)^2 + (b-v)^2 - r^2 = PO^2 - r^2 = d^2 - r^2.$$

Hatványvonal

Definíció

Azon pontok mértani helyét a síkon, melyeknek két fix körre vonatkozó hatványa megegyezik, a két kör hatványvonalának nevezzük.

Tétel

Koncentrikus köröknek nem létezik hatványvonala, két nemkoncentrikus kör hatványvonala pedig egy egyenes.

Tétel

Ha két körnek van közös pontja, akkor az a hatványvonalukon fekszik.

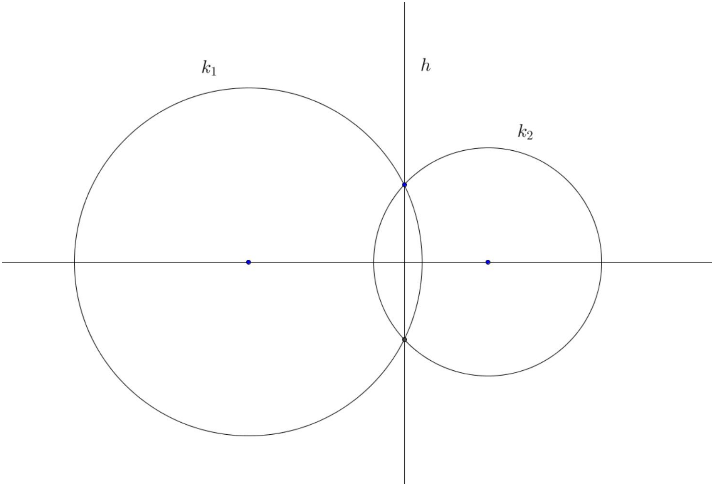
Bizonyítás.

A közös pont illeszkedik mindkét körre, ezért mindkét körre vonatkozó hatványa 0, azaz illeszkedik a hatványvonalra.

Következmény: metsző körök hatványvonala a metszéspontok összekötő egyenese.

Tétel

Két kör hatványvonala merőleges a középpontjaikat összekötő centrális egyenesükre.



Körsorok

Definíció

Legyen $K_1 = 0$ és $K_2 = 0$ két különböző kör vagy egy egyenes és egy kör egyenlete, de ne legyen mindkettő egyenesé. Tekintsük azokat az alakzatokat, melyek kielégítik a

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$$

egyenletet, ahol λ_1, λ_2 nem egyszerre 0, és befutja $\mathbb{R}$-et. Ezen alakzatok összességét a $K_1 = 0$ és $K_2 = 0$ alakzatok által meghatározott körsornak nevezzük.

Tétel

Minden körsor legfeljebb egy egyenest tartalmaz.

Definíció

Egy körsor alappontjának nevezzük azt a pontot, amelyen a körsor minden eleme áthalad.

Tétel

Egy körsor legfeljebb két alappontot tartalmaz.

Bizonyítás.

Három pont egyértelműen kifeszít egy kört vagy egy egyenest, ezért ha egy körsornak három alappontja lenne, a körsor minden eleme ez az egy kör vagy egyenes lenne, ami ellentmond a körsor definíciójának.

Tétel

Ha egy körsor két elemének létezik hatványvonala, akkor az szintén eleme a körsornak.

Tétel

A körsor tetszőleges két elemének hatványvonala megegyezik (amennyiben létezik).

Bizonyítás.

Két tetsz. hatványvonal eleme a körsornak, de egy körsorban legfeljebb egy egyenes lehet, így ez az egyenes az összes többi körpár hatványvonala is egyben.

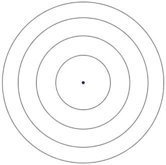
Definíció

Ha egy körsor minden körének középpontja egybeesik, koncentrikusnak nevezzük.

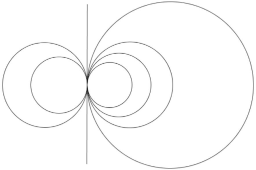
Az ilyen körsorok nem tartalmaznak egyenest.

Definíció

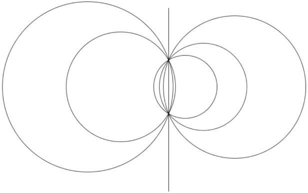
Ha egy egyenest tartalmazó körsornak 0 alapponjta van, elliptikusnak, ha 1 alapponjta van, parabolikusnak, ha 2 alappontja van, hiperbolikusnak nevezzük.



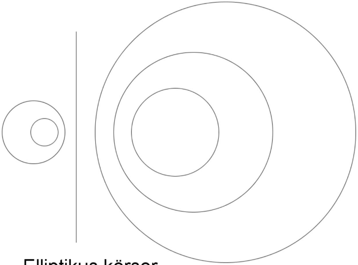
Koncentrikus körsor



Parabolikus körsor



Hiperbolikus körsor



Elliptikus körsor

Definíció

Két körsort konjugáltnak nevezünk, ha az egyik körsor minden eleme merőlegesen metszi a másik körsör minden elemét.

Tétel

Parabolikus körsor konjugáltja ugyancsak parabolikus körsor ugyanazzal az alapponttal, és az eredeti körsor centrumai által meghatározott hatványvonallal.

Tétel

Hiperbolikus körsor konjugáltja olyan elliptikus körsor, melynek két pontköre az eredeti körsor két alappontja, hatványvonala pedig az eredeti körsor centrumai által kifeszített egyenes.

Tétel

A konjugáltság szimmetriájából adódóan elliptikus körsor konjugáltja olyan hiperbolikus körsor, amelynek alappontjai az eredeti körsor pontkörei, hatványvonala pedig ezek összekötő egyenese.

Inverz sztereografikus vetítés során egyenest tartalmazó körsor köreiből olyan gömbi körök lesznek, melyek által meghatározott síkok egy egyenesben metszik egymást.
Ez az egyenes a gömböt parabolikus esetben érinti, hiperbolikus esetben két pontban metszi, elliptikus esetben elkerüli.
Koncentrikus esetben ez egy olyan, a gömbhöz képest kitérő egyenes, amelyet az Északi Sark képsíkkal párhuzamos érintősíkja tartalmaz.