# Robusztus és kétszíntű optimalizálás

Mályusz Attila
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

2022. december 22.

# Bevezetés

Kétszíntű optimalizálás.

- Két szereplős problémák
- Az első optimalizálni, akar valamilyen nyereséget, de a nyereség nagysága függ az első változóitól.
  - Áramszolgáltató
  - Autópálya költségek.

Így két szereplő egymástól függően optimalizál egymás válaszára.

# Definíció

Kétszintes optimalizálási probléma, a Vezető (felső szint) feladata:

$$\min_x \{F(x,y) : G(x) \leq 0, y \in \Psi(x), x \in X\} \quad (1)$$

ahol a Követő (alsó szint) feladata:

$$\min_y \{f(x,y) : g(x,y) \leq 0, y \in T\}, \quad (2)$$

ahol $f : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$, $g : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^p$, $T \subset \mathrm{R}^m$ zárt halmaz
Legyen

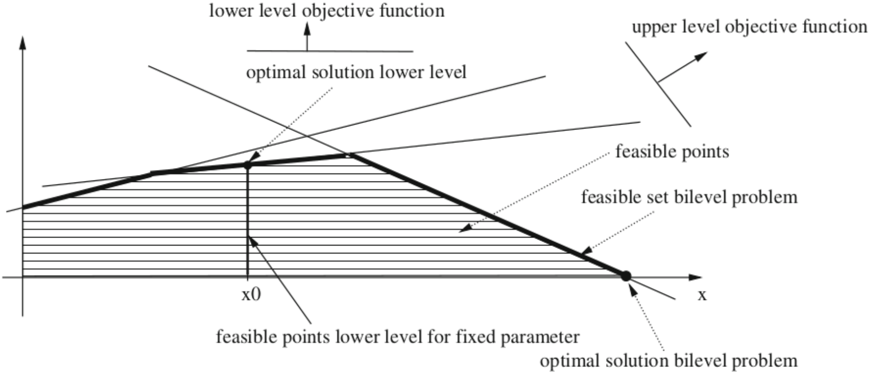
$$\varphi(x) = \min_y \{f(x,y) : g(x,y) \leq 0, y \in T\} \quad (3)$$

az optimális érték függvénye (2)-nek.

$$\Psi(x) = \{y \in T : f(x,y) \leq \varphi(x), g(x,y) \leq 0\} \quad (4)$$

# Nehézségek a kétszíntű optimalizálással kapcsolatban

- Az alsó és felső problémának egy-egy változója van. $n = 1$, $m = 1$
- $f(x, y) = -y$
- $\{(x, y) \ : \ y \in \Psi(x)\}$ a vastagított vonal
- Nem konvex a feladat.



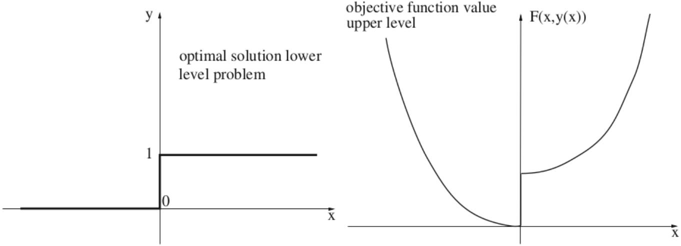

1. ábra. 1

# Nehézségek a kétszíntű optimalizálással kapcsolatban

$$\min_x \{x^2 + y : y \in \Psi(x)\}, \tag{5}$$

ahol

$$\Psi(x) = argmin_y\{-xy : 0 \leq x \leq 1\} \tag{6}$$



# Optimista versus Pesszimista kétszintű optimalizálás

- Optimista, ha a Vezető feltételezheti, hogy a Követő együttműködő, azaz a Vezető számára legkedvezőbb optimális megoldást választja.

$$\min\{F(x, y) : y \in \Psi(x)\} \tag{7}$$

a $\{x : G(x) \leq 0, x \in X\}$ halmazon.
Tehát olyan $y \in \Psi(x)$ megoldást ad a Követő, ami mellett az $F(x, y)$ a legkisebb.

- Pesszimista, ha a Vezető nem számíthat kooperációra, azaz a Követő a Vezető számára legkedvezőtlenebb optimális megoldást választja.

$$\min\max\{F(x, y) : y \in \Psi(x)\} \tag{8}$$

a $\{x : G(x) \leq 0, x \in X\}$ halmazon.
Tehát olyan $y \in \Psi(x)$ megoldást ad a Követő, ami mellett az $F(x, y)$ a legnagyobb.

# Lineáris kétszintes optimalizálás

$$\min_{x,y}\{a^T x + b^T y : Ax + By \leq c, y \in \Psi(x)\}, \tag{9}$$

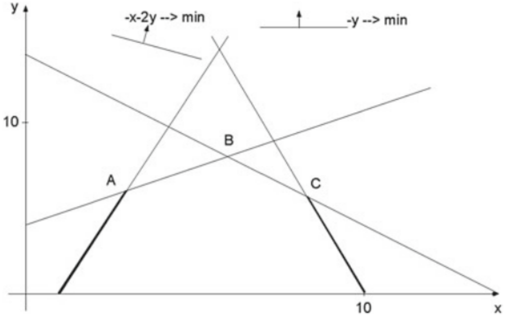
ahol

$$\Psi(x) = argmin_y\{d^T y : Cy \leq x\} \tag{10}$$

- Probléma ezzel a megfogalmazással: $Ax + By \leq c$ feltétel teljesülését csak $y$ megválasztása után lehet leellenőrizni.

# Példa (Mersha and Dempe. [1])

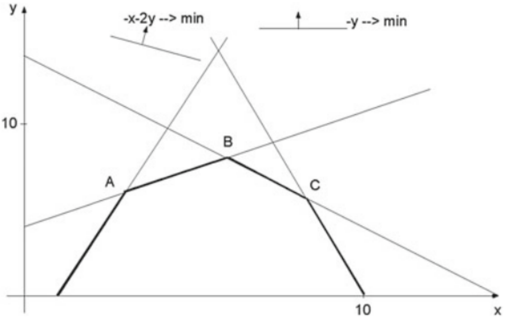
$$\min_{x,y} -x - 2y$$
$$\text{subject to } 2x - 3y \geq -12$$
$$x + y \geq 14$$
$$y \in argmin_y\{-y : -3x + y \leq -3, 3x + y \leq 30\}$$



# Példa (Mersha and Dempe [1])

$$\min_{x,y} -x - 2y$$

$$\text{subject to } y \in argmin_y\{-y : -3x + y \leq -3, 3x + y \leq 30,$$
$$2x - 3y \geq -12, x + y \geq 14\}$$



Új modell:

$$\min_{x,y}\{a^T x + b^T y : Ax \leq c, y \in \Psi(x)\}, \tag{11}$$

ahol

$$\Psi(x) = argmin_y\{d^T y : Cy \leq x\} \tag{12}$$

- (Nozicka [2]) cikkben be van bizonyítva, hogy a $\Psi(\cdot)$ leképzés gráfja előáll az $\{(x,y)^T : Cy \leq x\}$ halmaz oldalainak az összefüggő uniójaként.
- Az optimum megtalálható

$$\{(x,y)^T : Cy \leq x, Ax \leq c\} \tag{13}$$

valamelyik csúcsán.

# Egy robusztus kétszintűároptimalizálási probléma

- $G = (V, E)$ irányított gráf, egy szolgáltató, aki $q_e$ árat rendel az élekhez.
- $S$ utas $s_j$-ből $t_j$-be akarnak eljutni, $j = 1, \ldots, S$
- $p : E \to \mathbb{R}$ élköltség.
- Utasoknak külön-külön $u_j$ költség vektora az éleken ezek előre nem ismertek. De $u \in U$, $U$ előre ismert poliéderre.

$$\max_{q \in Q} z$$

$$\min_{u \in U} \left\{ \sum_{j=1}^{S} (q - p) x_j \mid x \in \Omega(q, u) \right\} \geq z,$$

ahol $x = (x_1, \ldots, x_S)$, és $\Omega(q, u)$ a következő feladat optimális megldásainak a halmaza

# A kétszintű áraoptimalizálási probléma

$\Omega(q, u)$ a következő feladat optimális megldásainak a halmaza

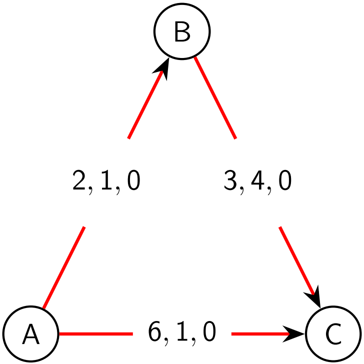
$$
\begin{aligned}
\text{minimize } & \sum_{j=1}^{S} \sum_{e \in E} (q_e + u_{j,e}) x_j(e) \\
\text{subject to } & x_j(\rho(t_j)) \geq 1, \quad \forall j \\
& x_j(\delta(s_j)) \leq 1, \quad \forall j \\
& x_j(\delta(v_j)) \leq x_j(\rho(v_j)), \quad \forall j, v \notin \{s_j, t_j\} \\
& x_j(e) \in \{0, 1\}, \quad \forall j, e
\end{aligned}
$$

# Algoritmus

1. Legyen $U^* = \emptyset$ és $F = \infty$ (az optimuma a Vezető problémájának). Alap $q$ érték. Menjünk a 3. lépésre
2. Oldjuk meg a relaxált problémát a jelenlegi $U^*$-al. Ebből kapunk $q$ tarifát és $F$ értéket.
3. Kapott $q$ értéket perturbáljuk $\delta$-val. Kapjuk a $q^\delta$-t. Keressünk utasokhoz megoldást $q^\delta$ tarifával, hogy megkapjunk egy $u'$ értéket és $F'$ cél függvény értéket.
4. Ha $F$ és $F'$ megfelelően közel van, akkor megtaláltunk egy jó $q$ tarifát és visszaadjuk $q^\delta$-t.
5. Ellenkező esetben találtunk egy $u'$ Vezetőnek kedvezőtlen hasznosságot. Két lehetőség
   1. Ha $u'$ jelentősen különbözik minden $U^*$-ban lévő költségettől, akkor $u'$-t hozzáadjuk $U^*$-hoz.
   2. Keresünk egy lényegesen eltérő költséget a költség térben segítségével.
6. Ha iterációs limitet elértük, akkor megállunk és visszadjuk a legjobb megoldást.

# Példa

Egy utasunk lesz aki $A$-ból $B$-be akar utazni. Vegyük a következő gráfot.




- $q$, $u$ és végűl $p$ az éleken.
- $e_1 = (A, B)$, $e_2 = (A, C)$, $e_3 = (B, C)$.

# Példa

1. Először veszünk egy $q$-t amely maximalizálja a $\sum_{e \in E} q_e$. $q = [2, 6, 3]$.
2. A perturbálás a következő értéket adja ki $q$-ra $\delta = 0.05$-el $q = [1.975, 5.925, 2.875]$
3. Ezek után a fix $q$ tarifára való optimális megoldás keresése feladata a következőképpen néz ki.

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } & 1.975x_1 + 5.925x_2 + 2.875x_3 \\
\text{subject to } & u \in U \\
& 0 \leq \alpha_1^+ \perp x(e_2) + x(e_3) \geq 1 \\
& 0 \leq \alpha_1^- \perp x(e_2) + x(e_1) \leq 1 \\
& 0 \leq \beta_{1,B} \perp x(e_3) - x(e_1) \geq 0 \\
& 0 \leq x_{e_3} \perp 2.875 + u_3 - \alpha_1^+ + \beta_{1,B} \geq 0 \\
& 0 \leq x_{e_2} \perp 5.925 + u_2 - \alpha_1^+ + \alpha_1^- \geq 0 \\
& 0 \leq x_{e_1} \perp 1.975 + u_1 + \alpha_1^- - \beta_{1,B} \geq 0
\end{aligned}
$$

1. Erre az optimális megoldás a következő.
   $u = [1, 0, 0.075]$, $x = [1, 0, 1]$, $\alpha^+ = [5.925]$, $\alpha^- = [0]$, $\beta = [0, 2.975, 0]$. Az optimum érték pedig 4.85.
2. A fix költség vektorokhoz keresünk egy legjobb $q$ tarifát.

maximize $Z$

subject to $q \in Q$

$$Z \leq (\sum_{j=1}^{S} \alpha^{+,k}_{j,e\in\rho(t_j)} - \alpha^{-,k}_{j,e\in\delta(s_j)} + \sum_{e\in E}(-u^k_{j,e} - p(e))x^k_j(e)) \quad \forall k$$

$$0 \leq \alpha_1^+ \perp x(e_2) + x(e_3) \geq 1$$

$$0 \leq \alpha_1^- \perp x(e_2) + x(e_1) \leq 1$$

$$0 \leq \beta_{1,B} \perp x(e_3) - x(e_1) \geq 0$$

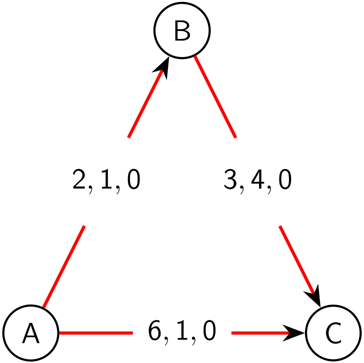
$$0 \leq x_{e_3} \perp 2.875 + u_3 - \alpha_1^+ + \beta_{1,B} \geq 0$$

$$0 \leq x_{e_2} \perp 5.925 + u_2 - \alpha_1^+ + \alpha_1^- \geq 0$$

$$0 \leq x_{e_1} \perp 1.975 + u_1 + \alpha_1^- - \beta_{1,B} \geq 0$$

# Példa

Az optimális megoldás pedig $x = [0, 1, 0]$, $q = [2, 6, 2.925]$, $\alpha^+ = [6]$, $\alpha^- = [0]$, $\beta = [0, 3, 0]$. Az optimum érték 6.



Köszönöm a figyelmet!

# Bibliography I


A. G. Mersha and S. Dempe.
Linear bilevel programming with upper level constraints depending on the lower level solution.
*Applied Mathematics and Computation*, 180(1):247–254, 2006.

F. Nožička, J. Guddat, H. Hollatz, and B. Bank.
*Theorie der Linearen Parametrischen Optimierung*.
1974.