Önálló projekt beszámoló

Encz Koppány

2022 December

Bevezetés

Az egyéni kutatómunka témájaul kitűzött probléma a következő volt: adott n csúcson egy gráf, amely előáll két darab feszítőfa uniójaként, és egy színezés az éleken úgy, hogy minden szín pontosan kétszer fordul elő. Döntsük el, hogy létezik-e két diszjunkt tarka feszítőfa, azaz olyan feszítőfa a gráfban, amely mindegyik színosztályból pontosan egy élt tartalmaz.

A korábbi félévek során kísérletet tettünk mind egy algoritmikus módszer kidolgozására, amely polinom időben megoldja a feladatot, mind pedig annak igazolására, hogy a feladat NP-teljes.

Az NP-teljességre időközben Bérczi, Csáji és Király bizonyítást adott [1]-ben; míg egy általánosabb matroidelméleti kérdés vizsgálata közben Hörsch, Kaiser és Kriesell megválaszolta a tarka feszítőfa probléma egy kiterjesztett változatát: ebben 2 helyett tetszőleges konstans k-ra tekintjük a feladatot, azaz adott egy gráf, amely k darab feszítőfa uniója, illetve adott egy színezés a gráf élein k méretű színosztályokkal. Dönstük el, hogy létezik-e k darab éldiszjunkt tarka feszítőfa a gráfban.

A félév egy részében a $k = 2$ esetre adott bizonyítást próbáltuk átvinni az általánosabb esetre. A következőkben röviden áttekintjük a $k = 2$, illetve tetszőleges k-ra adott bizonyításokat.

A félév másik részében a tarka feszítőfa probléma egy rokon kérdését vizsgáltuk. Adott n ponton egy gráf, amely $n - 1$ darab feszítő ki-fenyő uniója. Döntsük el, hogy van-e tarka ki-fenyő a gráfban, azaz olyan ki-fenyő, amely mind az $n - 1$ fenyőből tartalmaz élt. Egy ismert sejtés szerint mindig létezik tarka feszítő ki-fenyő. Ennek a sejtésnek néhány speciális esetben ismert a bizonyítása; ezeket az eseteket dolgoztuk fel, és próbáltuk felhasználni a látott módszereket további speciális esetek tisztázására, illetve az általános sejtés igazolására.

A beszámolóban ismertetett állítások, tételek közül azoknál, ahol nincs külön forrás megjelölve, a témavezetőm, Bérczi Kristóf által elmondott indoklásokat, vagy azok részleteit írom le.

Tarka feszítőfák

Ebben a fejezetben a tarka feszítőfa-probléma alapjait rögzítjük le, majd röviden áttekintjük a probléma NP-nehézségének [1]-ben és [2]-ben található bizonyítását.

Egy élszínezett gráf részgráfját tarkának mondjuk, ha mindegyik színosztályból tartalmaz élt.

Definíció. Legyen $G = (V, E)$ egy gráf n csúcson, $c : V \mapsto [k]$ egy élszínezése G-nek. Egy $H \subset G$ részgráf tarka, ha $\forall i \in [k]\, \exists e \in E(H) : c(e) = i$.

Érdemes megjegyezni, hogy az általunk vizsált esetben, azaz amikor G két feszítőfa uniója, és minden színosztály 2 méretű, a tarkaság fenti definíciója feszítőfákra megegyezik több másik tarkaság-fogalommal is: például azt is kiköthettük volna, hogy minden színosztályból legfeljebb egy / pontosan egy / legalább egy élt tartalmazzon; hiszen ha $2n-2$ él van G-ben, és mindegyik színosztály 2 méretű, akkor ezek a fogalmak egy $n-1$ élű feszítőfára egybeesnek.

A tarka feszítőfa-probléma pontos megfogalmazása a következő:

RSTkF (Rainbow spanning tree k-factorization):

Input: G gráf, ami k darab feszítőfa uniója; és G éleinek színezése k méretű színosztályokkal.

Feladat: Létezik-e G-ben k darab éldiszjunkt tarka feszítőfa?

A következőkben ismertetjük az ide vágó eredményeket.

Tétel. (Bérczi, Csáji, Király) RST2F NP-nehéz.

A bizonyítás vázlatát mutatjuk most be; a részletes bizonyítás megtalálható [1]-ben. Ehhez először szükségünk lesz a Monotone NAE-3-SAT-4 nyelv definíciójára.

Monotone NAE-3-SAT-4:

Input: φ konjunktív normálforma, ahol nem szerepel negált változó, minden klózban három literál szerepel, és minden literál pontosan négy klózban szerepel.

Feladat: Létezik-e olyan kielégítése φ-nek, amelyben minden klózban szerepel hamisra kiértékelt literál.

Ismert, hogy a Monotone NAE-3-SAT-4 NP-nehéz probléma, lásd [3].

Bizonyítás. A tétel bizonyítása a Monotone NAE-3-SAT-4 nyelvre való visszavezetéssel történik. Vegyünk egy $\varphi = (C, X)$ konjunktív normálformát, ahol minden $c \in C$ klózban pontosan három nem negált változó szerepel, és minden $x_i \in X$ változó pontosan négy klózban van benne. Ehhez fogjuk legyártani RSTkF egy pédányát.

Egy x_i változóhoz vegyünk fel négyszer négy gráfcsúcsot: $u_p^i, v_p^i, w_p^i, z_p^i, p \in [4]$. Minden $p \in [4]$-re $u_p^i, v_p^i, w_p^i, z_p^i$ egy K_4 teljes gráfot feszítsenek. Továbbá minden $C_j = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\}$ klózhoz vegyünk fel három csúcsot: c_1^j, c_2^j, c_3^j, melyek egy háromszöget feszítsenek. Ezeket a csúcsokat egy teljes párosítás segítségével megfeleltetjük a változó-csúcsok közül a z_p címkéjűeknek: ha $x_{i,q}$ az l-edik előfordulása a változónak a klózok egy rögzített sorrendjében, akkor $z_l^{i,q}$ és c_j^q között behúzunk egy élt, minden $q \in [3]$-ra. Végezetül a változócsúcsok közül $u_i^l, i \in [n], l \in [4]$ csúcsokat azonosítjuk, azaz felveszünk egy új r csúcsot, és mindegyik u_i^l -lel összekötjük két párhuzamos éllel.

Az így kapott $G = (V, E)$ gráf csúcsainak száma $16 \cdot n + 3 \cdot m + 1$, ahol n darab változó és m darab klóz volt φ-ben, tehát polinom idejű redukciót adtunk.

G éleinek színezését a következő módon deifináljuk:

- Az r-re illeszkedő párhuzamos élpárok egy színosztályt alkotnak.
- Legyen x_i egy változó, és $C_{j1}, C_{j2}, C_{j3}, C_{j4}$ az x_i-t tartalmazó klózok. Továbbá legyen $c_{q,p}^{jp}$ z_p^i szomszédja a $C_{j,p}$ klóznak megfelelő háromszögben ($p \in [4]$). Legyenek a színosztályok a következők: $\{w_p^i z_p^i, z_p^i c_{q,p}^{j,p}\}, \{v_p^i z_p^i, u_{p+1 \bmod 4}^i v_{p+1 \bmod 4}^i\}$, $\{u_p^i z_p^i, v_p^i w_p^i\}, \{u_p^i w_p^i, c_{q,p}^{j,p} c_{q,p+1 \bmod 4}^{j,p}\}$.

A fenti színezéssel (G, c) egy példánya lesz az RST2F feladatnak. Bérczi, Csáji és Király [1]-ben megmutatta, hogy pontosan akkor lesz φ-nek olyan kielégítése, amely minden klózban tartalmaz hamisra értékelt változót, ha (G, c)-ben van k darab éldiszjunkt tartka feszítőfa. Mivel a (G, c)-re való visszavezetés polinom idejű volt, ezért ebből következik, hogy RST2F NP-nehéz.

A $k > 2$ esetben adott bizonyítás hasonló a $k = 2$ esethez, néhány apró változatást kell csak eszközölni. Érdekes módon azonban az általános k esetében adott bizonyítás nem foglalja magában a $k = 2$ esetre adott bizonyítást, azt külön esetként kell kezelni. Az alábbiakban felvázolt bizonyításrészletet [2]-ből emeltük ki.

Tétel. (Hörsch, Kaiser, Kriesell) RSTkF NP-nehéz, ha $k \geq 3$.

A $k = 2$ esettel ellentétben most egy másik ismert NP-teljes nyelvre tudjuk visszavezetni a feladatot:

k-col (k-színezhetőség):
Input: G gráf, k pozitív egész
Feladat: Ki lehet-e színezni a G gráfot k színnel, azaz létezik-e $c : V(G) \to [k] : \forall uv \in E(G)\, c(u) \neq c(v)$.

A k-col feladatról ismert, hogy NP-teljes.

Bizonyítás. Az RSTkF feladatot a k-col feladatra vezetjük vissza. Legyen H egy tetszőleges gráf. A visszavezetés lényegi részét képező gadget-ek most is négy pontú gráfok lesznek.

Definíció. (Marijuana-levél) $G = (V, E)$ gráf k-marijuana-levél, ha $|V| = 4$, és G előáll úgy, hogy egy 4 csúcs teljes gráfhoz hozzávesszük az egyik csúcsból kiinduló 3 él által feszített részgráf $k-1$-szeresét.

Minden $e \in E(H)$ élhez rendeljünk hozzá egy G^e $k-1$-marijuana-levelet. A három darab $k-1$-szeres párhuzamos élhalmazt címkézzük meg tetszőleges sorrendben F^e, F^e_u, F^e_v címkével, majd a kimaradt három darab élt f^e, f^e_u, f^e_v címkével úgy, hogy az $(F^e, f^e), (F^e_u, f^e_u)$ és (F^e_v, f^e_v) élhalmazok rendre csúcsdiszjunktak legyenek.

Ezután az előző bizonyításhoz hasonlóan mindegyik G^e gráfból kiválasztunk egy tetszőleges csúcsot, és azonosítjuk őket (vagyis egy új r csúcsot mindegyikükkel összekötünk k párhuzamos éllel).

A k méretű színosztályok legyenek a következők:

- $\forall e \in E(H)$-ra $F^e \cup f^e$ egy színosztály
- $\forall v \in V(H)$-ra legyen $e_1, \ldots, e_t$ egy tetszőleges sorrendje a v-t tartalmazó H-beli éleknek. Ekkor minden $i \in [t]$-re legyen $F^{e_i}_v \cup f^{e_{i+1 \bmod t}}_v$ egy színsosztály.
- Végül az r csúcsba befutó k-szoros párhuzamos élek alkossanak egy-egy színosztályt.

A fenti módon előállított G gráf a k méretű színosztályokkal együtt az RSTkF feladat egy példánya, hiszen előáll k darab éldiszjunkt feszítőfa uniójaként: ehhez elég belátni, hogy minden $e \in E(H)$-ra G^e előáll k darab éldiszjunkt, G^e-t feszítő fa uniójaként. Ez pedig abból következik, hogy K_4 felbomlik 2 éldiszjunkt feszítőfa uniójára, a maradék három darab egy csúcsra illeszkedő, $k-2$ párhuzamos élhalmazból álló gráf pedig $k-2$ darab $K_{1,3}$ uniója, amelyek mind feszítik $V(G^e)$-t.

Hörsch, Kaiser és Kriesell belátta [2]-ben, hogy a fenti polinomiális visszavezetésre teljesül, hogy pontosan akkor színezhető H jól k darab színnel, ha G-ben a megadott színezés szerint van k darab éldiszjunkt tarka feszítőfa. Ebből adódóan RSTkF NP-nehéz.

Nyitott kérdések

Az eredti probléma-felvetés negatív megválaszolása után több kérdés is nyitott maradt a témakörben: Hörsch, Kaiser és Kriesell [2]-ben vizsgálja azon matroidokat, melyek alaphalmaza felbontható két diszjunkt bázisra. Sikeült belátniuk, hogy ha meg van adva egy partíciós matroid is az alaphalmazon, akkor az alaphalmaz lefedhető legfeljebb $\log n + 1$ darab tarka bázissal (azaz olyan bázisaival az eredeti $\mathcal{M}$ matroidnak, amelyek a partíciós matroid mindegyik osztályából tartalmaznak elemet). A gráfok tarka feszítőfáinak kérdése a fenti probléma azon speciális esete, amikor a matroid egy grafikus matroid, és felbomlik két diszjunkt feszítőfára, valamint a partíciós matroid az éleket 2 elemű színosztályokra partícionálja. Hörsch, Kaiser és Kriesell eredménye szerint ekkor a G gráf alaphalmazáról ugyan nem dönthető el, hogy felbomlik-e két diszjunkt feszítőfára, de bizosan lefedhető legfeljebb $\log n$ darab tarka feszítőfával. Egy további vizsgálandó kérdés lehet, hogy a $\log n$-es felső korlát javítható-e a grafikus matroid esetében, optimális esetben le lehet-e vinni konstansra az értékét. A korábban bemutatott NP-teljességi eredmény szerint a szóban forgó érték biztosan nagyobb kettőnél, de 2 és $\log n$ között más értékeket egyelőre nem lehet kizárni.

Tarka feszítő ki-fenyők

A feladat megértéséhez szükséges alapfogalmakat a következőkben definiáljuk.

Definíció. Egy $D = (V, A)$ irányított gráf r gyökerű ki-fenyő, ha az élei az irányítástól eltekinte fát feszítenek, és $\forall v \in V, v \neq r : \delta_{in}(v) = 1$.

Definíció. Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf, mely k darab éldiszjunkt feszítő ki-fenyő uniója. Egy $D' \subseteq D$ részgráf tarka, ha mind a k fenyőből tartalmaz élt.

A témakör alapvető problémája a fenti definíciókkal a következő módon fogalmazható meg:

Input: Egy $D = (V, A)$ digráf, amely $n - 1$ darab feszítő ki-fenyő uniója.
Feladat: Létezik-e D-ben tarka feszítő ki-fenyő?

Az előző fejezethez hasonlóan itt is igaz lesz, hogy a részgráf tarkaságát más módon is definiálhattuk volna: azt a feltételt, hogy mindegyik feszítő ki-fenyőből tartalmaz élt, lecserélhettük volna arra a feltételre, hogy mindegyik feszítő ki-fenyőből legfeljebb egy / pontosan egy élt tartalmaz. Ezek az alternatív definíciók ugyanis megegyeznek abban az esetben, amikor a szóban forgó D' részgráf feszítő ki-fenyő, amelynek tehát $n - 1$ éle van, és így valóban ekvivalens a feltételek, hogy mind az $n - 1$ színosztályból legfeljebb egy / legalább egy / pontosan egy élt tartalmaznak.

Érdemes megjegyezni, hogy a fenti észrevétellel a kérdés a tarka feszítőfák esetéhez hasonlóan átfogalmazható matroidelméleti feladattá: ekkor tehát adott egy S alaphalmaz, és rajta három különböző matroid: egy grafikus, és két partíciós (az egyik partíciós matroid az egy csúcsra illeszkedő élek közül választ ki legfeljebb egyet, amely abba a csúcsba fog mutatni; a másik partíciós matroid pedig az $|S| - 1$ darab fenyő éleit mint partíciós osztályokat tartalmazza). Ekkor a tarka feszítő ki-fenyő megfelel a három matroid egy közös bázisának. Aharoni és Berger [4]-ben és [5]-ben vizsgáltak hasonló jellegű kérdéseket.

A feladat nehézségét mutatja, hogy azt eldönteni, hogy létezik-e adott gyökérpontú feszítő tarka kifenyő, NP-nehéz feladat. Olyan bizonyítás tehát nem várható, amely a gráf egy rögzített csúcsából építi fel a fenyőt. Természetes lenne ugyanis az ötlet, hogy mivel $n-1$ fenyő van egy n csúcs gráfban, ezért a gráf (egyik) azon csúcsát válasszuk a potenciális tarka fenyő gyökerének, amely egyik fenyőnek sem gyökere. A megjegyzés értelmében ez nem lehet működőképes stratégia; és ráadásul nem is mindig létezik fenyő ilyen gyökérrel. Ha például az $n-1$ fenyőt úgy választjuk, hogy a gyökerük közös legyen, akkor a tarka fenyő gyökerének szükségéppen meg kell egyeznie a közös gyökérrel.

Ismert esetek

A továbbiakban részletezzük a sejtés néhány speciális esetét. Az egyik legegyszerűbben tisztázható eset, amikor mindegyik fenyőnek ugyan az a csúcs a gyökere.

Állítás. Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, és $r \in V$ csúcs. Tegyük fel, hogy A élhalmaz felbontható $|V| - 1$ darab r gyökerű feszítő ki-fenyő uniójára. Ekkor létezik D-ben tarka feszítő ki-fenyő.

Ebben az esetben a mohó algoritmus egy tarka feszítő ki-fenyőt szolgáltat, amely ráadásul r gyökerű lesz: építsük fel r-ből kiindulva az F ki-fenyőt; legyen az aktuális F csúcshalmaza X. Amíg $X \neq V$, addig egy $v \in V - X$ csúcsra létezik út r-ből mind az $n-1$ fenyőben. Vegyünk egy fenyőt, amelynek még nem használtuk fel egyetlen élét sem (ilyen létezik, hiszen $X \neq V$), majd vegyük hozzá F-hez a fenti fenyő azon élét, amely az rv úton először kilép X-ből. A kapott F szintén fenyő lesz, amely nem tartalmazza egyazon fenyő két különböző élét.

Előfordulhat, hogy az $n-1$ fenyő néhány gyökere egybeesik, ezért ezekre külön definíciót vezetünk be:

Definíció. Egy $v \in V$ csúcs multigyökér, ha az $n-1$ fenyő között legalább kettő van, melynek gyökere v.

A fenti állítás természetes kiterjesztése az az eset, amikor két csúcs között oszlanak el a fenyők gyökeret; a sejtés ebben az esetben is igaz.

Állítás. Tegyük fel, hogy D-ben két multigyökér van, és mindegyik fenyő gyökere egybeesik a két multigyökér valamelyikével. Ekkor D-ben van tarka feszítő ki-fenyő.

Bizonyítás. Legyen v_1 és v_2 a két multigyökér. Építsünk fel mohó módon egy v_1 és egy v_2 gyökerű tarka be-fenyőt (F_1 és F_2); a felhasznált színek száma legyen rendre c_1 és c_2. Ekkor a tarkaság miatt c_1 és c_2 él, és így $c_1 + 1$ és $c_2 + 1$ csúcs van a két fenyőben. Másrészt mivel minden színt felhasználtunk, ezért $c_1 + c_2 = n - 1$, azaz $c_1 + 1 + c_2 + 1 = n + 1$, tehát van közös csúcsa a két fenyőnek. Ebből a csúcsból tarka úton elérhető F_1-ben v_1, és ezen színektől különböző színeket tartalmazó tarka úton F_2-ben v_2. Ezután a fel nem használt színekből az előző indoklásban látott módon mohó módon kiegészíthetjük a két utat az egész gráf egy tarka feszítő ki-fenyőjévé.

Egy általánosabban megfogalmazott eset (amely magában foglalja az előző két speciális esetet), ha D-ben legfeljebb két multigyökér van.

Állítás. Tegyük fel, hogy D-ben legfeljebb két multigyökér van. Ekkor létezik tarka feszítő ki-fenyő D-ben.

A bizonyítás alapgondolata a következő: elég egy olyan tarka ki-fenyőt mutatni, amely eléri a multigyökereket (ez egyébként 2 helyett tetszőlegesen sok multigyökérre is igaz lesz); ekkor ugyanis meggondolható, hogy mohó módon, még nem használt színek hozzávételével a fenyő kibővíthető a teljes gráf egy tarka feszítő ki-fenyőjévé.

Egy ilyen tarka fenyő megléte pedig a korábbiakhoz hasonlóan igazolható: vegyünk a két multigyökérből, v_1-ből és v_2-ből egy-egy tarka, $v - 1$ illetve v_2 gyökerű be-fenyőt (az F_1 fenyőt azon színekből építsük fel, amelyeknek megfelelő fenyők v_2-ben gyökereznek, és fordítva). Megálláskor két esetet különböztetünk meg: ha $V(F_1) \cap V(F_2) \neq \emptyset$, akkor az előző feladat bizonyítása szó szerint megismételhető. Ellenkező esetben a két fenyő $c_1 + 1$ illetve $c_2 + 1$ méretére teljesül, hogy a $V(F_1) \cup V(F_2)$-n kívüli $n - (c_1 + c_2 + 2)$ pont mindegyike legfeljebb egy fenyőnek a gyökere, másrészt még $n - (c_1 + c_2 + 1)$ fenyőből nem használtunk élt. Ekkor tehát $V(F_1) \cup V(F_2)$-ben van olyan pont, amely egy eleddig nem használt fenyő gyökere. Ha ez $V(F_1)$-ben van, akkor vegyünk hozzá F_2-höz egy ilyen színű $V(F_2)$-be belépő élt, ha pedig $V(F_2)$-ben, akkor F_1-hez; majd iteráljunk. Ezzel a módszerrel eljutunk egy olyan feláláshoz, amikor $V(F_1) \cap V(F_2) \neq \emptyset$, és az előző eset alkalmazható.

A multigyökerek számát figyelembe vevő esetek közül a következő lépés az lenne, amikor 3 multigyökeret is megengedünk. Ekkor azonban a korábbi gondolatmenetek nem alkalmazhatóak, és eddig nem találtunk alternatív bizonyítási ötleteket.

Egy természetes út lenne mind a multigyökerek számára, mind egy általánosabban vett indukció, de több, a feladat jellegéből fakadó nehézség is azt sejteti, hogy teljesen általános esetben egy indukciós bizonyítás nem feltétlenül működik.

A kutatás során kipróbáltunk ötleteket, melyek élek összehúzásával/ elhagyásával tesznek kísérletet az $n-1$ fenyőről $n-2$-re való visszalépésre, de néhány speciális esetet leszámítva nem vezettek eredményre.

Ez alól az egyik kivétel, amikor mindegyik fenyő egy csillag. Ekkor ugyanis az egyik csillag éleit és r gyökerét törölve, a maradék csillagok éleit át tudjuk pakolni úgy, hogy működjön a visszavezetés: ha egy r-től különböző gyökerű csillag gyökere r', akkor az r-re illeszkedő éleket átpakoljuk r'-re ($r'r$ él eltűnik, rv él helyett pedig $r'v$ élt veszünk be); míg egy r gyökerű csillag esetén r törlése után kijelölünk egy másik csúcsot a csillag gyökerének, és az éleket átpakoljuk az új gyökérre: rv élből $r'v$ élt csinálunk, ahol r' volt az újonnan kijelölt gyökér. Be lehet látni, hogy ezzel a visszavezetéssel teljesül, hogy ha van tarka feszítőfa a módosítás után, akkor előtte is volt. Ebből következik az alábbi állítás:

Állítás. Tegyük fel, hogy $D = (V, A)$ $|V| - 1$ darab feszítő ki-fenyő uniója, ahol mindegyik fenyő alapgráfja egy csillag. EKkor D-ben van tarka feszítő ki-fenyő.

A visszavezetés érvényességéhez fontos kiemelni, hogy az élek átpakolása és a gyökér törlése után a fenyők továbbra is csillagok maradnak.

A csillagok speciális esetéből kiindulva egy újabb irányt tudtunk kijelölni. A fenyők alapgráfja (tehát amit úgy kapunk, hogy az irányítást elhagyjuk) játszott fontos szerepet, ezért megnéztünk olyan speciális eseteket, amikor az alapgráfokra szabunk ki valamilyen feltételt.

Ennek a megközelítésnek az első eredménye az alábbi állítás:

Definíció. Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf. D alapgráfja $G = (V, E)$, ahol $E = \{(u, v) \in V^2 : uv \in A \text{ vagy } vu \in A\}$.

Állítás. Legyen $D = (V, A)$ $|V|-1$ darab feszítő ki-fenyő uniója, melyek alapgráfja megegyezik. Ekkor D-ben létezik tarka feszítő ki-fenyő.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy tetszőleges $v \in V$ csúcsot, tekintsük a G alapgráfot mint egy v gyökerű fát. Legyen w egy olyan csúcs, amelyre teljesül hogy a benne gyökerező T_w részfában található fenyő-gyökerek száma legalább $|V - T_w|$. Ilyen csúcs létezik, mert minden u-ra T_u és $V - T_u$ közül az egyikre ez teljesül, és ha $V - T_u$-ra teljesül, akkor v helyett másik gyökeret választunk. Ekkor w-ből $V - T_w$ csúcsait el tudjuk érni $|V - T_w|$ színt (melyek gyökere T_w-ben van) tartalmazó tarka fenyővel. Ezután $V - T_w$-t és a felhasznált színű feszítő ki-fenyőket töröljük ki D-ből. A w-re szabott feltétel szerint a maradék gráfban T_w darab fenyő maradt meg, így indukcióval kapunk egy T_w-t feszítő tarka ki-fenyőt. Ehhez vegyük hozzá a w gyökerű, $V - T_w$-t feszítő tarka ki-fenyőt, amivel egy V-t feszítő tarka ki-fenyő adódik.

Az a feltétel, hogy a fenyők alapgráfja megegyezik, átfogalmazható úgy is, hogy az alapgráfok uniója egy fát feszít, hiszen ekkor szükségképpen mindegyik fenyő alapgráfja megegyezik a közösen feszített fával. A kutatás jelenlegi fázisában vizsgáljuk azt az esetet, amikor lecseréljük ezt a feltételt arra, hogy az alapgráfok egy kört feszítenek. EKkor persze a kör egy Hamilton-kör, és a fenyők alapgráfja mind Hamilton-utak. A sejtés egyszerűen belátható abban a speciális esetben, amikor a fenyők maguk is irányított utak; de az általánosabb esetben még nem sikerült igazolni.

Nyitott kérdések

A kutatás során a problémafelvetésben megfogalmazott általános kérdés tisztázása mellett a speciális esetek megértésére is erőfeszítéseket tettünk, hogy az itt kinyert eredményeket, módszereket sikerrel alkalmazhassuk a tarka feszítő ki-fenyő meglétének igazolására. Az általános sejtés igazolása még várat magára; az ehhez vezető út első lépése lehet a korábbiakban vázolt eset, amelynél az $n-1$ darab tarka feszítő ki-fenyő alapgráfjai egy kört feszítenek.

Irodalomjegyzék

[1] K. Bérczi, G. K. Csáji, T. Király, On the complexity of packing rainbow spanning trees, arXiv:2206.11924, 2022.

[2] Florian Hörsch, Tomáš Kaiser, Matthias Kriesell, Rainbow bases in matroids, arXiv:2206.10322, 2022

[3] S. Porschen, T. Schmidt, E. Speckenmeyer, and A. Wotzlaw. XSAT and NAE-SAT of linear CNF classes. Discrete Applied Mathematics, 167:1–14, 2014.

[4] R. Aharoni and E. Berger. The intersection of a matroid and a simplicial complex. Transactions of the American Mathematical Society, 358(11):4895–4917, 2006.

[5] R. Aharoni, E. Berger, and R. Ziv. The edge covering number of the intersection of two matroids. Discrete Mathematics, 312(1):81–85, 2012.