Tarka feszítőfák / feszítőfenyők

Encz Koppány

ELTE

2022 december 22

Tarka feszítőfák

Definíció.

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf n csúcson, $c : V \mapsto [k]$ egy élszínezése G-nek. Egy $H \subset G$ részgráf tarka, ha $\forall i \in [k] \, \exists e \in E(H) : c(e) = i$.

RSTkF (Rainbow spanning tree k-factorization)

Input: G gráf, ami k darab feszítőfa uniója; és G éleinek színezése k méretű színosztályokkal.
Feladat: Létezik-e G-ben k darab éldiszjunkt tarka feszítőfa?

Tarka feszítőfák

Tétel. (Bérczi, Csáji, Király)

RST2F NP-nehéz.

Monoton NAE-3-SAT-4

Input: φ CNF, nem szerepel negált változó, minden klózban három literál szerepel, minden változó pontosan 4 klózban fordul elő.
Feladat: Létezik-e olyan kielégítése φ-nek, amelyben minden klózban szerepel hamisra kiértékelt literál.

Példa

$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

Állítás

Monoton NAE-3-SAT-4 NP-teljes.

Tarka feszítőfák

Tétel. (Bérczi, Csáji, Király)

RST2F NP-nehéz.

Bizonyítás.

Monoton NAE-3-SAT-4 α RST2F

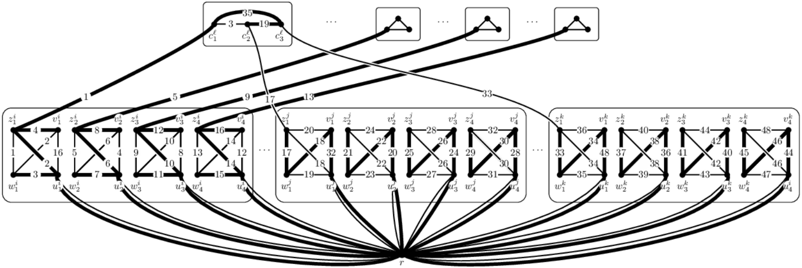


Figure: Bérczi, Csáji, Király in [1]

Tarka feszítőfák

$k > 2$?

Tétel. (Hörsch, Kaiser, Kriesell)

RSTkF NP-teljes, ha $k \geq 3$.

***k*-col (*k*-colorabilty)**

Input: G egyszerű gráf, $k \in \mathbf{N}$.
Feladat: Ki lehet-e színezni G-t jól k színnel.

Állítás.

k-col NP-teljes.

Tarka feszítőfák

Tétel. (Hörsch, Kaiser, Kriesell)

RSTkF NP-teljes, ha $k \geq 3$.

Bizonyítás.

k-col α RSTkF
$e = uv \in E(G)$
Színosztályok:

- $F^e \cup f^e$
- $\delta_G(v) = \{e_1, \ldots, e_t\} \to F_v^{e_i} \cup f_v^{e_{(i+1 \bmod t)}}, i = 1, \ldots, t$

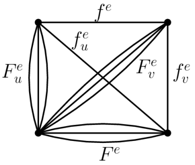


Figure: Hörsch, Kaiser, Kriesell in [2]

Tarka feszítőfák

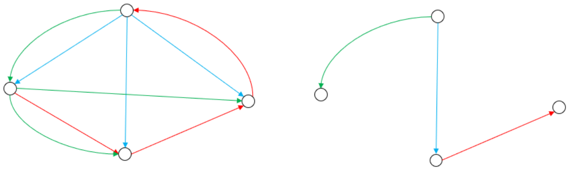
Nyitott kérdések

Input: G gráf, amely előáll két diszjunkt feszítőfa uniójaként; valamint egy élszínezés.
Kérdés: $\min\{k \in \mathbf{N} : G \text{ lefedhető } k \text{ tarka feszítőfával}\}$.
Ismert, hogy $\log n + 1$ elég ([2]).

Tarka feszítő fenyők

Adott: $D = (V, A)$ digráf, amely $|V| - 1$ darab feszítő ki-fenyő uniója.
Feladat: Létezik-e D-ben tarka feszítő ki-fenyő?

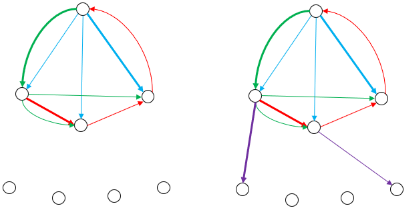
Definíció:
$D' \subseteq D$ tarka, ha mindegyik fenyőből tartalmaz élt.



Tarka feszítő fenyők

Állítás.

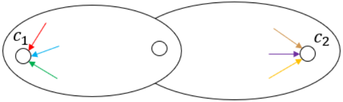
Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, és $r \in V$ csúcs. Tegyük fel, hogy A élhalmaz felbontható $|V| - 1$ darab r gyökerű feszítő ki-fenyő uniójára. Ekkor létezik D-ben tarka feszítő ki-fenyő.



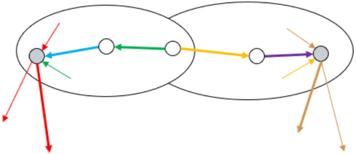
Tarka feszítő fenyők

Állítás.

Ha D-ben legfeljebb 2 csúcs van, amely valamelyik fenyőnek a gyökere, akkor van tarka feszítő ki-fenyő



$c_1 + c_2 + 2 = n + 1$



Tarka feszítő fenyők

Definíció

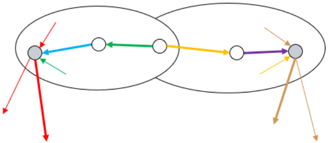
Egy $v \in V$ csúcs multigyökér, ha legalább 2 fenyőnek a gyökere.

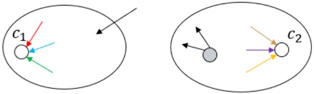
Állítás.

Ha D-ben van egy tarka fenyő, amely eléri a multigyökereket, akkor D-ben van tarka feszítő ki-fenyő.

Állítás.

Tegyük fel, hogy D-ben legfeljebb két multigyökér van. Ekkor létezik D-ben tarka feszítő ki-fenyő.





kívül $n-(c_1+c_2+2)$ csúcs, $n-(c_1+c_2+1)$ gyökér

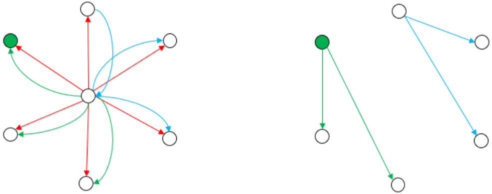
Tarka feszítő fenyők

Definíció.

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf. D alapgráfja $G = (V, E)$, ahol $E = \{(u, v) \in V^2 : uv \in A \text{ vagy } vu \in A\}$.

Állítás.

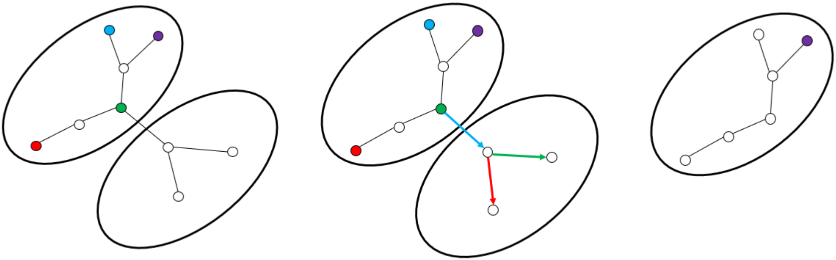
Tegyük fel, hogy $D = (V, A)$ $|V| - 1$ darab feszítő ki-fenyő uniója, ahol mindegyik fenyő alapgráfja egy csillag. Ekkor D-ben van tarka feszítő ki-fenyő.



Tarka feszítő fenyők

Állítás.

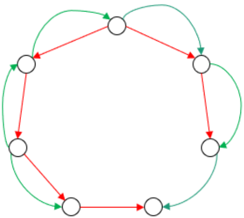
Tegyük fel, hogy $D = (V, A)$ $|V| - 1$ darab feszítő ki-fenyő uniója, ahol mindegyik fenyő alapgráfja megegyezik. Ekkor D-ben van tarka feszítő ki-fenyő.



Tarka feszítő fenyők

Nyitott kérdések.

- Általános eset
- Ha az alapgráfok kört feszítenek.



- Ha mindegyik fenyő egy út, akkor igaz.

Források

K. Bérczi, G. K. Csáji, T. Király, On the complexity of packing rainbow spanning trees, arXiv:2206.11924, 2022.

Florian Hörsch, Tomáš Kaiser, Matthias Kriesell, Rainbow bases in matroids, arXiv:2206.10322, 2022

S. Porschen, T. Schmidt, E. Speckenmeyer, and A. Wotzlaw. XSAT and NAE-SAT of linear CNF classes. Discrete Applied Mathematics, 167:1–14, 2014.

R. Aharoni and E. Berger. The intersection of a matroid and a simplicial complex. Transactions of the American Mathematical Society, 358(11):4895–4917, 2006.

R. Aharoni, E. Berger, and R. Ziv. The edge covering number of the intersection of two matroids. Discrete Mathematics, 312(1):81–85, 2012.