Robusztus Optimalizálás

Mályusz Attila

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

2022. május 19.

Bevezetés

- Lineáris és egészértékű programozás feladatok estén mindig feltételeztük, hogy az adott elemek pontosan kimért adatok.
- Ez viszont hibára adhat lehetőséget, hiszen az adatok legtöbbször mért adatok.
  Példáúl:
  - fizikai mérésből származó adat
  - kereslet adott termékekre (statisztikai módszerrel van közelítve)

Így olyan megoldást keresünk amely változó adatok mellett még mindig kielégítse a feltételeket és ezeken belül optimális legyen.

Régebbi modellek

- Első próbálkozás Soystertől jött [5]
- A megoldásnak megengedettnek kellett lennie minden olyan adatra amely egy konvex halmazból származik.
- Probléma: Messze került a robusztus optimális érték a kapott (nominális) adatokból számolt optimális értéktől.

Soyster modell

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && c'x \\ &\text{subject to} && \sum_{j=1}^{n} A_j x_j \leq b, \forall A_j \in K_j, j = 1, \ldots, n \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

- K_j konvex halmazok a bizonytalansági halmazok
- A_j pedig az oszlopai a mátrixnak

Soyster modell

Soyster megmutatta, hogy a feladat ekvivalens a következő LP-vel.

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & c'x \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} \bar{A}_j x_j \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

ahol $\bar{a}_{ij} = sup_{A_j \in K_j}(A_{ij})$.

Ben-Tal modell

- Egymástól függetlenül Ben-Tal és Nemirovski [1], El-Ghaoui [4]
- A robusztus feladat optimális megoldás értéke ne legyen túl távol a kapott értékekből számolt optimumtól.

Bizonytalanság modellje

Ehhez tekintsük a következő lineáris optimalizálási feladatot.

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c'x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \\ & l \leq x \leq u \end{aligned}$$

Állítás

[3] Feltehetjük, hogy a bizonytalanság egyedül az A mátrixot érinti.

Bizonytalanság modellje

A következő féleképpen fogjuk modellezni a bizonytalanságot a mátrixban.

- Vegyük A egy sorát és legyen J_i azon eggyüthatók halmaza az i. sorban melyek bizonytalanok.
- a_{ij}, $j \in J_i$ eggyütható egy $\bar{a}_{ij}$ random változó, mely a $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ intervallumból vesz fel értéket és szimmetrikus az adott intervallumra (a_{ij} a nominális érték, $\hat{a}_{ij}$ pedig előre ismert).

Soyster modellje újra

Soyster LP feladatja átalakul ebben a bizonytalansági modellben:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c'x \\ \text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} \bar{A}_j x_j \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c'x \\ \text{subject to} \quad & \sum_{j} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} y_j \leq b_i, \forall i \\ & -y_j \leq x_j \leq y_j \\ & l \leq x \leq u \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Berstimas-Sim modell

- Minden i-re (sorindex) bevezetünk egy Γ_i változót, melyre $\Gamma_i \in [0, |J_i|]$.
- $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ maximum ennyi együttható változtatja meg értékét és egy a_{ij} együttható $(\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor)\hat{a}_{ij}$-vel (a feladat robusztusságát alakítja)

Ebből kapjuk a következő jelenleg még nem lineáris formalizációját a problémának (1).

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & c'x \\
\text{subject to} \quad & \sum_j a_{ij} x_j + \\
& \max_{\{S_i \cup t_i | S_i \subset J_i, |S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \{\textstyle\sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} y_j + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor)\hat{a}_{ij} y_t\} \le b_i, \\
& -y_j \le x_j \le y_j \\
& l \le x \le u \\
& y \ge 0
\end{aligned}
$$

Berstimas-Sim modell LP-je

Állítás

[3] Legyen adva egy x vektor, ekkor
$\beta_i(x, \Gamma_i) = max_{\{S_i \cup t_i | S_i \subset J_i, |S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij}|x_j| + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor)\hat{a}_{ij}|x_j|$
megeggyezik a következő lineáris programozási feladat optimum értékével

$$\begin{aligned} \beta_i(x, \Gamma_i) = \text{maximize} \quad & \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij}|x_j|z_{ij} \\ \text{subject to} \quad & \sum_{j \in J_i} z_{ij} \leq \Gamma_i \\ & 0 \leq z_{ij} \leq 1 \; \forall j \in J_i \end{aligned}$$

Berstimas-Sim modell LP-je

Tétel

[3] (1)-nek a következő lineáris programizási feladat felel meg:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & c'x \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j} a_{ij}x_j + z_i\Gamma_i + \sum_{j \in J_i} p_{ij} \leq b_i, \forall i \\
& z_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij}y_j && \forall i, j \in J_i \\
& -y_j \leq x_j \leq y_j && \forall j \\
& l_j \leq x_{jj} && \forall j \\
& p_{ij} \geq 0 && \forall i, j \in J_i \\
& y_j \geq 0 && \forall j \\
& z_i \geq 0 && \forall i
\end{aligned}
$$

Egészértékű problémák

- Ha MIP feladatunk van akkor gy nagyon hasonló formalizációt tudunk felírni (továbbiakért lásd. [2]).

Kombinatorikus problémák: Adott $X \subseteq \{0,1\}^n$ halmaz és optimalizálási feladat

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \widetilde{c}x \\ \text{subject to} \quad & x \in X \end{aligned}$$

, ahol $\widetilde{c}$ minden $\widetilde{c}_j$ eleme a $[c_j, c_j + d_j]$, $d_j \geq 0$, $j \in N = \{1, 2, \dots n\}$.

Kombinatorikus problémák

Cél: $x \in X$ megoldást találni amely minimalizálja a $\widetilde{c}x$ költséget, ha legfeljebb Γ együttható változhat meg.(2)

$$Z^* = \text{maximize} \quad \widetilde{c}x + max_{\{S|S\subseteq N,|S|\leq\Gamma\}} \sum_{j\in S} d_j x_j$$
$$\text{subject to} \quad x \in X$$

Legyen $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ és legyen $d_{n+1} = 0$.

Kombinatorikus problémák

- Ha polinomiális az alap problémánk, akkor a robusztus változat is polinomiális.

Tétel

A (2) feladat megoldása megkapható $n+1$ feladat megoldásából:
$Z^* = min_{l=1,\dots,n+1} G^l$, *ahol*

$$\begin{aligned} G^l = \text{maximize} \quad & \Gamma d_l + min(\tilde{c}x + \sum_{j=1}^{l}(d_j - d_l)x_j) \\ \text{subject to} \quad & x \in X \end{aligned}$$

- Ha az eredeti feladatnak van α közelítő algoritmusa, akkor a robusztus feladatra adhatunk egy α közelítő megoldást (továbbiakért lásd [2]).

Mérés

- Legrövidebb út problémát vettük a [2] cikkből.
- Adott egy $D = (V \cup \{s, t\}, A)$, c_{ij} $(i, j) \in A$ nem negatív költségekkel. Legrövidebb utat keressük s-ből t-be.

A gráfot és az élköltségeket a következőképpen generáltuk.

- A gráf éleit Erőds-Rényi modellből.
- Vegyük a síkot. Legyen s a $(0, 0)$, t pedig $(1, 1)$.
- Generáljunk a $[0, 1] \times [0, 1]$ tégalalban pontokat.
- c_{ij} az euklideszi távolság i és j által meghatázott pontok között
- $d_{ij} = \gamma c_{ij}$ ahol γ egyenletes eloszlású a $[0, 8]$
- $\Gamma = 0, 3, 6, 10$-re mérjük meg a robusztus legrövidebb utat

Azt is mérjük, hogyha minden élen 0.2 valószínűséggel $c_{ij} + d_{ij}$-re változtatjuk a költséget, akkor az így kapott gráfban mennyi a legrövidebb út.

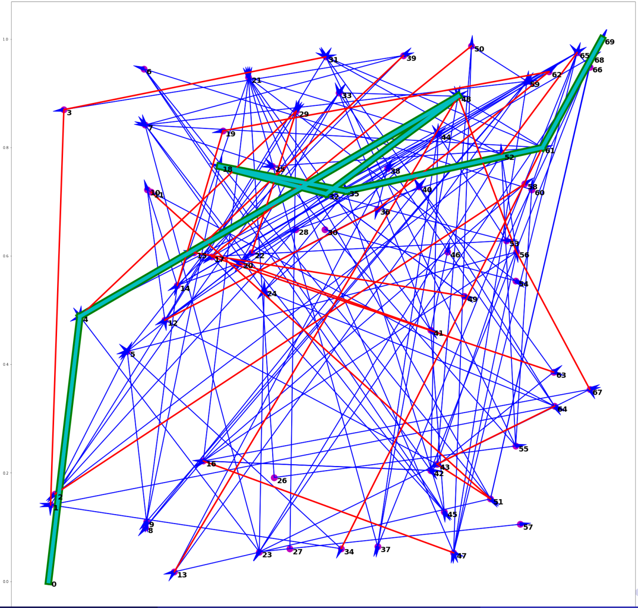
Mérés

- 70 csúcs
- Erdős-Rényi valószínűség: 0.03
- A kapott méréseink alapján a robusztus legrövidebb út mindig megegyezik $\Gamma = 3, 6, 10$-re.
- Csak ritkán érhető el az, hogy különbözzön a robusztus megoldás értéke $\Gamma = 6, 10$-ra.

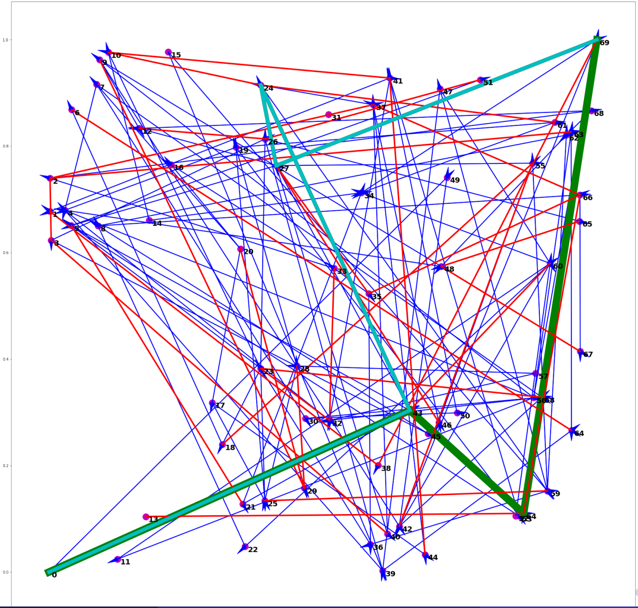
Példa futás eredménye:

- Adott 0.2 eltolás esetén a költség: 4.05393
- Robusztus költségek: 2.60772 10.7865 12.2327 12.5136

Mérés


1.0
69
50
65
39
31
68
66
6
62
21
59
33
48
3
29
7
19
44
0.8
61
52
25
18
38
58
40
10
60
11
35
32
36
28
30
53
46
56
22
0.6
15
17
20
54
14
24
49
4
12
41
5
0.4
63
67
64
55
16
43
0.2
42
26
2
51
1
45
9
57
8
37
27
34
23
47
13
0.0
0

Mérés



Köszönöm a figyelmet!

Bibliography I

A. Ben-Tal and A. Nemirovski.
Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data.
Mathematical Programming, 88:411–424, 01 2000.

D. Bertsimas and M. Sim.
Sim, m.: Robust discrete optimization and network flows. math. prog. 98, 49-71.
Mathematical Programming, 98:49–71, 09 2003.

D. Bertsimas and M. Sim.
The price of robustness.
Operations Research, 52:35–53, 02 2004.

Bibliography II

L. El Ghaoui and H. Lebret.
Robust solutions to least-squares problems with uncertain data.
SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 18(4):1035–1064, 1997.

A. L. Soyster.
Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming.
Operations Research, 21(5):1154–1157, 1973.