Forszolás alkalmazása topologikus terek konstruálására

Székely Ákos

Témavezető: Soukup Lajos

1. Diszpergált terek

Legyen (X, τ) topologikus tér. A továbbiakban szükség lesz az alábbi fogalmakra:

(i) Transzfinit rekurzióval definiáljuk az I operációt a következőképpen: $I_0 := iso(X)$ (ahol $iso(X) = X \setminus X'$, azaz X izolált pontjainak összessége) és ha $\langle I_\beta : \beta < \alpha \rangle$ adott már, akkor legyen $I_\alpha = iso(X \setminus \bigcup\{I_\beta : \beta < \alpha\})$. Számossági megfontolásból következik, hogy $\exists \alpha \in On : \beta > \alpha : I_\beta = I_\alpha$ így van legkisebb ilyen rendszám is, jelölje ezt $ht(X)$. Az X tér számosságsorozata $SEC(X) := \langle |I_\alpha| : \alpha < ht(X) \rangle$.

(ii) Az X teret diszpergáltnak (scattered) mondjuk, ha $\forall Y \subset X : iso(Y) \neq \emptyset$. A lokálisan kompakt, T2, diszpergált tereket röviden LCS tereknek hívjuk a továbbiakban.

Alapkérdés: Létezik-e (X, τ) tér adott számosságsorozattal? Egy konkrétabb kérdés: van-e (X, τ) LCS, 0 dimenziós tér, melyre $SEC(X) = \langle \omega \rangle_{\omega_1}$

1.1 Állítás. *Con(ZFC +* $\exists (X, \tau) : LCS,\ 0\ dim,\ SEC(X) = \langle \omega \rangle_{\omega_1}$*)*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} P = \{(A, u, i) : A \in [\omega \times \omega_1]^{<\omega} \wedge u : A \to \mathcal{P}(A) \wedge i : [A]^2 \to [A]^{<\omega} \wedge \\ \forall (n, \alpha) \in A : u(n, \alpha) \cap \omega \times \{\alpha\} = \{(n, \alpha)\} \wedge u(n, \alpha) \subset \omega \times (\alpha + 1) \wedge \\ \forall (k, \alpha), (l, \beta) \in A((l, \beta) \in u(k, \alpha) \to u(l, \beta) \subset u(k, \alpha) \wedge \\ u(l, \beta) \cap u(k, \alpha) \neq \emptyset \to \forall (m, \gamma) \in u(l, \beta) \cap u(k, \alpha) : \\ \exists (r, \delta) \in i(\{(k, \alpha), (l, \beta)\}) : (r, \delta) \in u(l, \beta) \cap u(k, \alpha) \wedge (m, \gamma) \in u(r, \delta))\} \end{aligned}$$

$\forall (A, u, i), (B, v, j) \in P$ esetén definiáljuk:

$$(A, u, i) \leq (B, v, j) \leftrightarrow B \subset A \wedge \forall x \in B : u(x) \cap B = v(x) \wedge i \restriction [B]^2 = j$$

Ellenőrizhető, hogy $(P, \leq)$ poset. Belátjuk, hogy ccc. $p \in P$ esetén jelölje $X^p = \mathrm{pr}_2(A^p)$ a második koordinátára való vetületet.

1.2 Definíció. *$p, q \in P$ ikrek, ha $|X^p| = |X^q|, \max X^p \cap X^q < \min X^p \setminus X^q, \max X^p \setminus X^q < \min X^q \setminus X^p$ és az $\eta_{p,q} : X^p \to X^q$ természetes rendezés-izomorfizmus felemelhető A^p és A^q közötti $\tilde{\eta}_{p,q} : A^p \to A^q$ bijekcióvá a következőképpen: $\forall (n, \alpha) \in A^p : \tilde{\eta}_{p,q}(n, \alpha) = (n, \eta_{p,q}(\alpha))$ melyre továbbá teljesül, hogy $\forall x, y \in A^p : u^q(\tilde{\eta}_{p,q}(x)) = \tilde{\eta}_{p,q}(u^p(x)$, valamint $i^q(\{\tilde{\eta}_{p,q}(x), \tilde{\eta}_{p,q}(y)\}) = \tilde{\eta}_{p,q}(i^p(\{x, y\}))$ (ami tulajdonképpen azt jelenti, hogy az $\tilde{\eta}_{p,q}$ bijekció mentén áthúzva az u^q, i^q függvényeket A^p-re éppen u^p, i^p-t kapjuk).*

1.3 Állítás. *Legyenek $p, q \in P$ ikrek. Ekkor $\exists r \in P : r \leq p, q$.*

Bizonyítás. Definiáljuk az r feltételt a következőképpen: $A^r := A^p \cup A^q$,

$$u^r(x) := \begin{cases} u^p(x) & , x \in A^p \\ u^q(x) & , x \in A^q \setminus A^p \end{cases}, i^r(\{x, y\}) := \begin{cases} i^p(\{x, y\}) & , x, y \in A^p \\ i^q(\{x, y\}) & , x, y \in A^q \\ A^p \cap A^q & , x \in A^p \setminus A^q, y \in A^q \setminus A^p \end{cases}$$

Mivel $\eta_{p,q} \restriction X^p \cap X^q = id$, így $\tilde{\eta}_{p,q} \restriction A^p \cap A^q = id$ és emiatt i^r jóldefiniált. Könnyen ellenőrizhető, hogy $r = (A^r, u^r, i^r) \in P$ és valóban $r \leq p, q$. ■

Legyen $\langle p_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ feltételek egy ω_1-es rendszere. Az $\langle X^{p_\alpha} : \alpha < \omega_1 \rangle$ rendszerre (amelyről az eredeti sorozat ritkításával feltehető, hogy páronként különböző, azonos számosságú (legyen ez $n < \omega$) elemekből áll) az alapmodellben alkalmazva a Δ-rendszer lemmát és eszerint tovább ritkítva a fenti sorozatot feltehető, hogy $\langle X^{p_\alpha} : \alpha < \omega_1 \rangle$ Δ-rendszer $A \in [\omega_1]^{<\omega}$ maggal. Amennyiben $A = \emptyset$,úgy

$$\forall \alpha, \beta < \omega_1 : (A^{p_\alpha} \cup A^{p_\beta}, u^{p_\alpha} \cup u^{p_\beta}, i^{p_\alpha} \cup i^{p_\beta} \cup \{(\{x, y\}, \emptyset) : x \in A^p, y \in A^q\}) \leq p_\alpha, p_\beta$$

emiatt feltehető, hogy $A \neq \emptyset$. Transzfinit rekurzióval konstruálunk egy $\langle \alpha_\gamma : \gamma < \omega_1 \rangle$ sorozatot a következők szerint: mivel $\max A$ megszámlálható rendszám, így $\exists \alpha_0 < \omega_1 : \max A < \min X^{p_{\alpha_0}} \setminus A$. Ha $\langle \alpha_\gamma : \gamma < \beta \rangle, \beta < \omega_1$ kész, akkor legyen

$$\alpha_\beta = \min\{\delta < \omega_1 : \min X^{p_\delta} \setminus A > \sup(\{X^{p_{\alpha_\gamma}} : \gamma < \beta\} \cup \{\alpha_\gamma : \gamma < \beta\})\}$$

(a kérdéses minimum létezik, mert a halmaz definíciójában szereplő sup egy megszámlálható rendszámhalmaz suprémuma, így $< \omega_1$). Jelölje $\varphi_\gamma : X^{p_\gamma} \to n$ a természetes rendezésizomorfizmust.Mivel a $\langle \varphi_\gamma(\mathrm{pr}_2(\{n\} \times \omega_1 \cap A^{p_{\alpha_\gamma}})) : n < \omega \rangle \in {}^\omega\mathcal{P}(n)$ sorozatok csak megszámlálható félék, így további ritkítással feltehető, hogy a $\langle X^{p_{\alpha_\gamma}} : \gamma < \omega_1 \rangle$ sorozatban $\forall \gamma < \delta < \omega_1$ esetén az $\eta_{p_{\alpha_\gamma}, p_{\alpha_\delta}} : X^{p_\gamma} \to X^{p_\delta}$ természetes rendezésizomorfizmus felemelődik $A^{p_\gamma} \to A^{p_\delta}$ bijekcióvá amely a $p_{\alpha_\gamma}, p_{\alpha_\delta}$ feltételek között egy izomorfizmust létesít az ikerség definíciója szerint. Így a $\langle p_{\alpha_\gamma} : \gamma < \omega_1 \rangle$ sorozat elemei páronként ikrek tehát az előző állítás szerint páronként kompatibilisek és így P ccc.

Legyen $G \subset P$ egy M-generikus filter (M az alapmodell) és $\forall(n,\alpha) \in \omega \times \omega_1$-re legyen $V(n,\alpha) = \bigcup\{u^p(n,\alpha) : p \in G\}$. Belátjuk, hogy a $\langle V(n,\alpha) : n < \omega, \alpha < \omega_1 \rangle$ rendszer rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(i) $\forall(n,\alpha) \in \omega \times \omega_1 : V(n,\alpha) \cap \omega \times \{\alpha\} = \{(n,\alpha)\}, V(n,\alpha) \subset \omega \times (\alpha+1)$

(ii) $\forall(n,\alpha),(m,\beta) \in \omega \times \omega_1 : (m,\beta) \in V(n,\alpha) \to V(m,\beta) \subset V(n,\alpha)$

(iii) $\forall(n,\alpha) \in \omega \times \omega_1 \forall\beta < \alpha : |V(n,\alpha) \cap \omega \times \{\beta\}| = \omega$

(iiii) Ha $(n,\alpha) \in \omega \times \omega_1, A \in [\omega \times \omega_1]^{<\omega}$ olyan, melyre $\forall y \in A : (n,\alpha) \notin V(y)$, akkor $\forall\gamma < \alpha : |(V(n,\alpha) \setminus \bigcup\{V(y) : y \in A\}) \cap \omega \times \{\gamma\}| = \omega$.

(v) $\forall(n,\alpha),(m,\beta) \in \omega \times \omega_1 : V(n,\alpha) \cap V(m,\beta) \neq \emptyset \to \exists A \in [V(n,\alpha) \cap V(m,\beta)]^{<\omega} : V(n,\alpha) \cap V(m,\beta) = \bigcup\{V(k,\gamma) : (k,\gamma) \in A\}$

(i): $x \in \omega \times \omega_1$ esetén legyen $\mathscr{D}^1_x = \{p \in P : x \in A^p\}$. Ekkor $\mathscr{D}^1_x \subset P$ sűrű: ha $p \in P$ és $x \notin A^p$, akkor $q = (A^p \cup \{x\}, u^p \cup \{(x,\{x\})\}, i^p \cup \{(\{x,y\},\emptyset) : y \in A^p\}) \in P$ és látható, hogy $q \leq p$.

Emiatt $\forall(n,\alpha) \in \omega \times \omega_1 : G \cap \mathscr{D}^1_x \neq \emptyset \to V(n,\alpha) \neq \emptyset$ és mivel $\forall p \in P : (n,\alpha) \in A^p \to u^p(n,\alpha)$-ra teljesülnek az (i)-ben megköveteltek, így $V(n,\alpha)$-ra is.

(ii): Azon múlik, hogy két G-beli elemnek van közös G-beli kiterjesztése illetve, hogy a (ii)-beli tulajdonsággal rendelkezik bármely $u^p(p \in P)$, melyre $(n,\alpha),(m,\beta) \in A^p$.

(iii): $n,k \in \omega, \beta < \alpha < \omega_1$ esetén legyen

$$\mathscr{D}^2_{(n,\alpha),k,\beta} = \{p \in P : (n,\alpha) \in A^p \to \exists m \geq k : (m,\beta) \in A^p \wedge (m,\beta) \in u^p(n,\alpha)\}$$

Ekkor $\mathscr{D}^2_{(n,\alpha),k,\beta} \subset P$ sűrű: ha $p \in P : (n,\alpha) \in A^p$, akkor mivel $|A^p| < \omega$ ezért $\exists m \geq k : (m,\beta) \notin A^p$. Definiáljuk a q-t a következőképpen: $A^q := A^p \cup \{(m,\beta)\}$,

$$u^q(x) := \begin{cases} u^p(x) & , x \in A^p, (n,\alpha) \notin u^p(x) \\ u^p(x) \cup \{(m,\beta)\} & , x \in A^p, (n,\alpha) \in u^p(x) \\ \{(m,\beta)\} & , x = (m,\beta) \end{cases}$$

$$i^q(\{x,y\}) := \begin{cases} i^p(\{x,y\}) & , x,y \in A^p \\ \{(m,\beta)\} & , egyik \in A^p, másik = (m,\beta) \end{cases}$$

Nem nehéz belátni, hogy $q \in P$ és így $q \in \mathscr{D}^2_{(n,\alpha),k,\beta}$ is teljesül, valamint $q \leq p$. Így ha $p \in G$ olyan, melyre $(n,\alpha) \in A^p$ ((i)-ben láttuk, hogy van ilyen), akkor mivel $\mathscr{D}^2_{(n,\alpha),k,\beta}$ sűrű p alatt következik, hogy $G \cap \mathscr{D}^2_{(n,\alpha),k,\beta} \neq \emptyset \to \mathrm{pr}_1(V(n,\alpha) \cap \omega \times \{\beta\}) \cap [k,\omega[\neq \emptyset$.

Mivel k tetszőleges így (iii) adódik.

(iiii): $(n,\alpha)\in\omega\times\omega_1, A\in[\omega\times\omega_1]^{<\omega}$, $k\in\omega,\gamma<\alpha$ esetén a

$$\begin{aligned}\mathscr{D}^3_{(n,\alpha),A,\gamma,k}=\{p\in P:\{(n,\alpha)\}\cup A\subset A^p\wedge\forall y\in A:(n,\alpha)\notin u^p(y)\rightarrow\\ \exists l\geq k:(l,\gamma)\in A^p\wedge(l,\gamma)\in u^p(n,\alpha)\setminus\bigcup\{u^p(y):y\in A\}\}\end{aligned}$$

halmazok sűrűek P-ben, amit a (iii)-beli q kiterjesztésből láthatunk. Így (iii)-hoz hasonlóan adódik (iiii).

(v): ha $\forall(n,\alpha),(m,\beta)\in\omega\times\omega_1$-re $V(n,\alpha)\cap V(m,\beta)\neq\emptyset\rightarrow\exists p,q\in G:u^p(n,\alpha)\cap u^q(m,\beta)\neq\emptyset$. Legyen $r\in G:r\leq p,q$ és $A:=i^r(\{(n,\alpha),(m,\beta)\})$. Ha $x\in V(n,\alpha)\cap V(m,\beta)$, akkor van $r_1\in G,r_1\leq r:x\in u^{r_1}(n,\alpha)\cap u^{r_1}(m,\beta)$ és $i^r(\{(n,\alpha),(m,\beta)\})=i^{r_1}(\{(n,\alpha),(m,\beta)\})$ miatt van $y\in A:x\in u^{r_1}(y)$. Ebből $V(n,\alpha)\cap V(m,\beta)=\bigcup\{V(k,\gamma):(k,\gamma)\in A\}$ következik.

Az

$$\mathscr{S}=\{V(n,\alpha):n<\omega,\alpha<\omega_1\}\cup\{\omega\times\omega_1\setminus V(n,\alpha):n<\omega,\alpha<\omega_1\}$$

szubbázisa egy lokálisan kompakt T2, diszpergált, 0-dimenziós τ topológiának az $X=\omega\times\omega_1$ alaphalmazon, M[G]-ben, mely számosságsorozata $\langle\omega\rangle_{\omega_1}$. Az világos, hogy τ T2, 0-dimenziós és diszpergált ($x\in X$ esetén a $V(x)$ környezet „lefele néz”, így ha $Y\subset X$ és $y\in Y$ olyan, melyre $\mathrm{pr}_2(y)$ minimális, akkor $V(y)\cap Y=\{y\}$).

Most belátjuk, hogy a $\langle V(n,\alpha):(n,\alpha)\in X\rangle$ környezetek kompaktak. α szerinti indukcióval bizonyítjuk: $\alpha=0$ esetén $V(n,\alpha)=\{(n,\alpha)\}$ ami kompakt. Tegyük fel, hogy $\alpha>0$ és $\forall\beta<\alpha$-ra tudjuk az állítást. Elég látni, az Alexander-féle szubbázis tétel szerint, hogy $V(n,\alpha)$-nak tetszőleges $A\in\mathscr{P}(\mathscr{S})$ lefedéséből kiválasztható véges részlefedés. Először is $\exists S\in A:(n,\alpha)\in S$. Ha $S=V(y)$ valamely $y\in X$-re, akkor a fenti (ii) miatt $V(n,\alpha)\subset S$ teljesül, így feltehető, hogy $S=X\setminus V(y)$ alakú és $V(n,\alpha)\not\subset S$. Ekkor $V(n,\alpha)\cap V(y)\neq\emptyset$ így (v) miatt $\exists B\in[V(n,\alpha)\cap V(y)]^{<\omega}:V(n,\alpha)\cap V(y)=\bigcup\{V(z):z\in B\}$ és az indukciós feltevés miatt a $V(z)(z\in A)$ halmazok kompaktak így van $A^{'}\in[A]^{<\omega}$ véges részlefedés.

Egy $x=(n,\alpha)\in X$ tipikus báziskörnyezete a fenti bázis szerint $W=V(x)\setminus\bigcup\{V(y):y\in A\}$ alakú, ahol $A\in[X]^{<\omega}$ olyan, melyre $\forall y\in A:x\notin V(y)$. (iiii) szerint ekkor $\forall\gamma<\alpha:|W\cap\omega\times\{\gamma\}|=\omega$ amiből transzfinit indukcióval adódik, hogy $\forall\alpha<\omega_1:I_\alpha(X)=\omega\times\{\alpha\}$ és így valóban $SEC(X)=\langle\omega\rangle_{\omega_1}$. ■

Ismert, hogy ZFC $\vdash\exists(X,\tau):LCS,\ SEC(X)=\langle\omega\rangle_{\omega_1}$, azonban a fenti gondolatmenet alkalmas módosításaival megkapható a következő is:

1.4 Állítás. *Con(ZFC + $\exists(X,\tau):LCS,\ 0\ dim.,\ SEC(X)=\langle\omega_1\rangle_{\omega_2}$)*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $M \models CH$. A poset definíciója hasonló az előző bizonyításbeli posetéhez:

$$\begin{aligned}P^{'} = \{(A,u,i) : A \in [\omega_1 \times \omega_2]^{\leq\omega} \wedge u : A \to \mathcal{P}(A) \wedge i : [A]^2 \to [A]^{<\omega} \wedge \\ \forall(n,\alpha) \in A : u(n,\alpha) \cap \omega \times \{\alpha\} = \{(n,\alpha)\} \wedge u(n,\alpha) \subset \omega \times (\alpha+1) \wedge \\ \forall(k,\alpha),(l,\beta) \in A((l,\beta) \in u(k,\alpha) \to u(l,\beta) \subset u(k,\alpha) \wedge \\ u(l,\beta) \cap u(k,\alpha) \neq \emptyset \to \forall(m,\gamma) \in u(l,\beta) \cap u(k,\alpha) : \\ \exists(r,\delta) \in i(\{(k,\alpha),(l,\beta)\}) : (r,\delta) \in u(l,\beta) \cap u(k,\alpha) \wedge (m,\gamma) \in u(r,\delta))\}\end{aligned}$$

$\forall(A,u,i),(B,v,j) \in P^{'}$ esetén definiáljuk:

$$(A,u,i) \leq (B,v,j) \leftrightarrow B \subset A \wedge \forall x \in B : u(x) \cap B = v(x) \wedge i \restriction [B]^2 = j$$

A $(P^{'}, \leq)$ poset már nem feltétlenül ccc, de az igaz, hogy ω_2-antilánc feltételes és ω_1-zárt, ami szintén garantálja, hogy $P^{'}$-vel forszolva a számosságok megmaradnak.
Ha $\langle p_n : n < \omega \rangle$ feltételek csökkenő sorozata, akkor definiáljuk a p feltételt a következőképpen: $A^p := \bigcup\{A^{p_n} : n < \omega\}$, $x \in A^p$ esetén ha $m_x = \min\{n : x \in A^{p_n}\}$, akkor legyen $u^p(x) = \bigcup\{u^{p_n}(x) : n \geq m_x\}$, végül legyen $i^p = \bigcup\{i^{p_n} : n < \omega\}$. Ellenőrizhető, hogy $p = (A^p, u^p, i^p) \in P^{'}$ és $\forall n < \omega : p \leq p_n$ amiből kapjuk az ω_1-zártságot.
Az ω_2-es antilánc feltétel igazolásához szükségünk lesz az előző bizonyításban megadott ikerség fogalmára. Legyen $\langle p_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle \subset P^{'}$. Ahogyan az előző bizonyításban tettük, ritkítások sorozatával elérhető, és emiatt feltehető, hogy az A^{p_α} halmazok azonos számosságúak, $\langle X^{p_\alpha} : \alpha < \omega_2 \rangle$ Δ-rendszer $A \in [\omega_2]^{\leq\omega}, A \neq \emptyset$ maggal ($\langle X^{p_\alpha} : \alpha < \omega_2 \rangle$ megszámlálható halmazok $\omega_2 = c^+(CH)$ sorozata így M-ben alkalmazható a Δ-rendszer lemma), valamint $\beta < \alpha < \omega_2$ esetén $\sup X^{p_\beta} < \min X^{p_\alpha}$ és végül, hogy a $\langle p_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ feltételek páronként ikrek.

1.5 Állítás. *$\gamma < \beta < \alpha < \omega_2$ esetén $\exists q \in P^{'} : q \leq p_\gamma, p_\beta, p_\alpha$.*

Bizonyítás. Legyenek $\eta_{p_\gamma,p_\beta}, \eta_{p_\beta,p_\alpha}, \eta_{p_\gamma,p_\alpha}$ az ikerség definíciója szerinti természetes rendezés izomorfizmusok. Legyen $A^q = A^{p_\gamma} \cup A^{p_\beta} \cup A^{p_\alpha}$. Definiáljuk u^q, i^q-t a következőképpen:

$$u^q(x) = \begin{cases} u^{p_\gamma}(x) & , x \in A^{p_\gamma} \\ u^{p_\beta}(x) \cup u^{p_\gamma}(\tilde{\eta}^{-1}_{p_\gamma,p_\beta}(x)) & , x \in A^{p_\beta} \setminus A^{p_\gamma} \\ u^{p_\alpha}(x) \cup u^{p_\gamma}(\tilde{\eta}^{-1}_{p_\gamma,p_\alpha}(x)) & , x \in A^{p_\alpha} \setminus A^{p_\gamma} \end{cases},$$

$$
i^q(\{x,y\}) = \begin{cases} i^{p_\gamma}(\{x,y\}) & ,\{x,y\} \in [A^{p_\gamma}]^2 \\ i^{p_\gamma}(\{x, \tilde{\eta}^{-1}_{p_\gamma,p_\beta}(y)\}) & ,x \in A^{p_\gamma}, y \in A^{p_\beta} \setminus A^{p_\gamma} \\ i^{p_\gamma}(\{x, \tilde{\eta}^{-1}_{p_\gamma,p_\alpha}(y)\}) & ,x \in A^{p_\gamma}, y \in A^{p_\alpha} \setminus A^{p_\gamma} \\ i^{p_\gamma}(\{\tilde{\eta}^{-1}_{p_\gamma,p_\alpha}(x), \tilde{\eta}^{-1}_{p_\gamma,p_\beta}(y)\}) & ,x \in A^{p_\alpha} \setminus A^{p_\gamma}, y \in A^{p_\beta} \setminus A^{p_\gamma} \\ i^{p_\beta}(\{x,y\}) & ,\{x,y\} \in [A^{p_\beta} \setminus A^{p_\gamma}]^2 \\ i^{p_\alpha}(\{x,y\}) & ,\{x,y\} \in [A^{p_\alpha} \setminus A^{p_\gamma}]^2 \end{cases}
$$

Hosszadalmas de viszonylag rutinszerű ellenőrzése a feltételeknek $p_\gamma, p_\beta, p_\alpha$ páronkénti ikerségét kihasználva mutatja, hogy $q = (A^q, u^q, i^q)$ jóldefiniált és $q \in P'$, valamint $q \leq p_\gamma, p_\beta, p_\alpha$. (Az előző bizonyításbeli gondolatmenet, mellyel két ikernek találtunk közös kiterjesztést itt nem működik, mivel most megszámlálható feltételeink vannak és így i^q-t egyik esetben sem definiálhatjuk a teljes $A^{p_\gamma} \cap A^{p_\beta}$ metszetként. Ehelyett három „egymás fölött elhelyezkedő” ikret veszünk és a legalsó feltételt használjuk i^q definiálására.) ■

Tehát ebből kapjuk, hogy $(P', \leq)$ ω_2-antilánc feltételes. Végül az $(X,\tau) \in M[G]$ teret ugyan úgy kapjuk, mint az előző bizonyításban és ez egy lokálisan kompakt, T2, 0 dimenziós, diszpergált tér, melyre $SEC(X) = \langle \omega_1 \rangle_{\omega_2}$. ■

A fent bemutatott forszolást módosítva (ez viszont már jóval nehezebb) kijön az alábbi állítás is:

1.6 Állítás. [1](Shelah, Baumgartner) *Con(ZFC +* $\exists (X,\tau) : LCS$, *0 dim.*, $SEC(X) = \langle \omega \rangle_{\omega_2}$*)*

2. Pszeudokompsktság és megszámlálható kompaktság

Az alábbiakban kis betekintést nyerhetünk Soukup Lajos, Juhász István és Szentmiklóssy Zoltán egy aktív kutatásába.

2.1 Definíció. *Legyen* (X,τ) *topologikus tér. Ekkor*

(i) *X pszeudokompakt, ha* $\forall f \in C(X;\mathbb{R})$ *korlátos.*

(ii) *X megszámlálhatóan kompakt,* $\forall A \in [X]^\omega$ *esetén* $A' \neq \emptyset$. *(*$\leftrightarrow$ *X minden végtelen részének van torlódási pontja* $\leftrightarrow$ *X bármely megszámlálható nyílt lefedéséből kiválasztható véges részlefedés)*

(iii) *X feebly kompakt, ha* $\mathscr{A} \subset \tau \setminus \{\emptyset\}$ *lokálisan véges, akkor* $|\mathscr{A}| < \omega$. *(*$\leftrightarrow \forall \mathscr{A} \in [\tau \setminus \{\emptyset\}]^\omega : \exists x \in X : \forall V \in \tau(x) : |\{A : A \in \mathscr{A} \wedge A \cap V \neq \emptyset\}| = \omega$*)*

2.2 Állítás. *Legyen* (X, τ) *topologikus tér. Ekkor fennállnak a következők:*

(i) *Ha X megszámlálhatóan kompakt, akkor pszeudokompakt.*

(ii) *Ha X feebly kompakt, akkor pszeudokompakt. Ha X teljesen reguláris* ($\to T1$)*, akkor igaz a megfordítás is.*

Bizonyítás. (i): Ha $f \in C(X; \mathbb{R})$ nem korlátos, akkor $\exists\{x_x : n \in \omega\} \subset X : \forall n \in \omega : |f(x_n)| \geq n$. Ha x torlódási pontja az előbbi sorozatnak, akkor f x-beli folytonossága miatt $\exists V \in \tau(x) : f \restriction V$ korlátos, azonban $|V \cap \{x_x : n \in \omega\}| = \omega$ ami ellentmondás.
(ii): Ha $f \in C(X; \mathbb{R})$ nem korlátos, akkor a $\{[|f| > n] : n \in \omega\} \in [\tau \setminus \{\emptyset\}]^\omega$ lokálisan véges. Tegyük most fel, hogy X teljesen reguláris. Ha $\{U_n : n \in \omega\} \in \tau \setminus \{\emptyset\}]^\omega$ lokálisan véges, akkor $\forall n \in \omega$ esetén legyen $f_n \in C(X; [0,1]) : f_n \restriction X \setminus U_n = 0, f_n(x) = 1$ valamely $x \in U_n$-re. Ekkor $\sum_n n f_n \in C(X; \mathbb{R})$ (lokálisan véges összeg) és nem korlátos. ■

2.3 Megjegyzés. *Terek konstruálásánál kézenfekvőbb a feebly kompaktságra hajtani így ha emellett garantálni tudjuk, hogy a tér teljesen reguláris (spec. T2 és 0 dimenziós) legyen, akkor pszeudokompakt is.*

Kérdés: Létezik-e pszeudokompakt de nem megszámlálhatóan kompakt tér?

2.4 Állítás. (ZFC) $\exists(X, \tau)$ *tér, mely pszeudokompakt de nem megszámlálhatóan kompakt.*

Bizonyítás. (**Ψ-tér**)
Konstrukció: legyen $\mathscr{A} \in [\omega]^\omega$ MAD rendszer és legyen $X = \omega \cup \mathscr{A}$. ω elemei legyenek izoláltak és egy $A \in \mathscr{A}$ pont környezetbázisa legyen $\{(A \setminus S) \cup \{A\} : S \in [\omega]^{<\omega}\}$. Belátható, hogy így egy topológiát definiáltunk X-en, ami láthatóan T2, M1 és $\forall S \in [\omega]^{<\omega}, A \in \mathscr{A}$ esetén az $(A \setminus S) \cup \{A\}$ környezetek nyílt-zártak (az $\mathscr{A}$ rendszer majdnem diszjunktságát kihasználva látható) tehát 0 dimenziós is. Az $\mathscr{A}$ altér zárt diszkrét emiatt X nem megszámlálhatóan kompakt. Belátjuk, hogy X pszeudokompakt: ha $f \in C(X; \mathbb{R})$ nem korlátos, akkor $f \restriction \omega$ sem korlátos (mivel $\omega \subset X$ sűrű) így $\exists\{x_n : n \in \omega\} \in [\omega]^\omega : |f(x_n)| > n$. Mivel $\mathscr{A}$ MAD, ezért $\exists A \in \mathscr{A} : |\{x_n : n \in \omega\} \cap A| = \omega$ ami azt jelenti, hogy $A \in \{x_n : n \in \omega\}'$ de ez ellentmond f A-beli folytonosságának. ■

Két dolgot megállapíthatunk a fenti térről: (i) $\mathscr{A}$ nagy zárt diszkrét részhalmaz ($|X| = |\mathscr{A}|$), valamint (ii), van benne sűrű, relatíve megszámlálhatóan kompakt halmaz ($Y \subset X$ relatíve megszámlálhatóan kompakt, ha $\forall A \in [Y]^\omega$ A-nak létezik torlódási pontja X-ben): ω (az, hogy ő rel. megsz. kompakt abból következik, hogy ha $B \in [\omega]^\omega$, akkor mivel $\mathscr{A}$ MAD $\exists A \in \mathscr{A} : |A \cap B| = \omega$ ami azt jelenti, hogy A torlódási pontja B-nek az X térben).

Az első megfigyelés felveti a kérdést: Van-e (X, τ) pszeudokompakt de nem megszámlálhatóan kompakt, melyre $e(X) = \omega$ (azaz X bármely zárt diszkrét altere megszámlálható). A válasz igen:

2.5 Állítás. *(L. Soukup, I. Juhász, Z. Szentmiklóssy)* (ZFC) $\exists (X, \tau)$ *M1, 0 dimenziós, T2 pszeudokompakt de nem megszámlálhatóan kompakt tér melyre* $e(X) = \omega$.

Felmerült a kérdés, hogy a fenti követelmények mellett $e(X) = \omega$ erősíthető-e $s(X) = \omega$-ra (azaz, hogy X minden diszkrét altere megszámlálható legyen). ZFC-ben nincs ilyen, mivel ebből következne S-tér létezése (T3, öröklődően szeparábilis, nem Lindelöf) amiről azonban ismert, hogy létezése független ZFC-től.

Nézzük most a másik, Ψ-térre tett megfigyelést és foglalkozzunk a következő kérdéssel: Van-e (X, τ) tér, mely pszeudokompakt, nem megszámlálhatóan kompakt és nincs benne sűrű, relatíve megszámlálhatóan kompakt altér? A válasz igen:

2.6 Állítás. (ZFC) $\exists X \in [{}^c2]^c$ *mely* $\mathscr{G}_\delta$*-sűrű* ${}^c2$*-ben (azaz, elmetsz minden nemüres* $\mathscr{G}_\delta$*-t) és* $\forall A \in [X]^\omega$: *A zárt diszkrét az X altérben.*

Bizonyítás. Először nézzük, hogy az állításban szereplő X altér miért példa a fenti kérdésre: az könnyen látható, hogy X nem megszámlálhatóan kompakt és nem tartalmaz sűrű, relatíve megszámlálhatóan kompakt alteret. Igaz továbbá a következő lemma:

2.7 Lemma. *Ha* $X \subset {}^c2$ $\mathscr{G}_\delta$*-sűrű* ${}^c2$*-ben, akkor pszeudokompakt.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy X feebly kompakt. Legyen $\langle [\epsilon_n] : n \in \omega \rangle$ ${}^c2$-beli bázisnyíltak egy sorozata, melyről feltesszük, hogy csökkenő. Ekkor mivel X $\mathscr{G}_\delta$-sűrű ${}^c2$-ben, van $x \in X \cap [\bigcup\{\epsilon_n : n \in \omega\}]$. Így $\forall n \in \omega : x \in X \cap [\epsilon_n]$ tehát $\langle [\epsilon_n] : n \in \omega \rangle$ nem lokálisan véges az x pontban. ■

Most nézzük X konstrukcióját: $A \subset c, s \in {}^A2$ esetén jelölje $[s] = \{f \in {}^c2 : s \subset f\}$. Ekkor minden ${}^c2$-beli $\mathscr{G}_\delta$ halmaz előáll $\{[s] : s \in {}^A2, A \in [c]^\omega\}$-beli $\mathscr{G}_\delta$-k uniójaként ezért elég, ha a megkonstruálandó X altér ennek minden elemét elmetszi. Legyen $\langle G_\alpha : \alpha < c \rangle$ az $\{[s] : s \in {}^A2, A \in [c]^\omega\}$ halmaz egy felsorolása valamint $\langle (A_\alpha, x_\alpha) : \alpha < c \rangle$ a $\{(A, x) : A \in [c]^\omega, x \in c\}$ halmaz egy c-abundáns felsorolása. Transzfinit rekurzióval konstruálunk egy $\langle \langle f^\alpha_\beta : \beta < c \rangle : \alpha < c \rangle$ sorozatot melyre:

(i) $\forall \alpha, \beta, \gamma < c : f^\alpha_\beta : \alpha + 1 \to 2$ függvény, valamint ha $\alpha < \gamma$, akkor $f^\alpha_\beta \subset f^\gamma_\beta$

(ii) $\forall \alpha, \beta < c : f^\alpha_\beta$ „α-ig G_β-ban halad", azaz, $\exists f \in G_\beta : f^\alpha_\beta \subset f$.

Legyen $\delta < c$ és tegyük fel, hogy $\langle \langle f^\alpha_\beta : \beta < c \rangle : \alpha < \delta \rangle$ adott már az (i), (ii) tulajdonságokkal. Ha $\beta < c$ és $|\operatorname{pr}_\delta(G_\beta)| = 1$, akkor legyen $f^\delta_\beta = \bigcup\{f^\alpha_\beta : \alpha < \delta\} \cup \{(\delta, i)\}$, ahol $i \in 2$

olyan, melyre (ii) teljesül f^δ_β-ra. Ha a $A_\delta \cup \{x_\delta\}$-beli β-k esetén $|\operatorname{pr}_\delta(G_\beta)| = 2$ teljesül, akkor legyen $f^\delta_\beta = \bigcup\{f^\alpha_\beta : \alpha < \delta\} \cup \{(\delta, 0)\}$ ha $\beta = x_\delta$, illetve $f^\delta_\beta = \bigcup\{f^\alpha_\beta : \alpha < \delta\} \cup \{(\delta, 1)\}$, ha $\delta \in A_\delta \setminus \{x_\delta\}$. Különben, adott $\beta < c$-re, tetszőlegesen terjesszük ki a $\bigcup\{f^\alpha_\beta : \alpha < \delta\}$ függvényt a δ pontban.
Legyen $\beta < c$ esetén $f_\beta = \bigcup\{f^\alpha_\beta : \alpha < c\}$ és $X = \{f_\beta : \beta < c\}$. Ekkor a konstrukció miatt $\forall \alpha < c$-re $f_\alpha \in X \cap G_\alpha$. Ha $A \in [c]^\omega, \eta < c$, akkor $\exists \delta < c : \forall \alpha \in A : \forall \delta < \delta' < c :$ $|\operatorname{pr}_{\delta'}(G_\alpha)| = 2$. A fenti felsorolás c-abundanciája miatt van s$\delta < \gamma : (A_\gamma, x_\gamma) = (A, \eta)$. Ekkor a konstrukció szerint $[\{(\gamma, f_\eta(\gamma))\}] \cap \{f_\alpha : \alpha \in A \setminus \{\eta\}\} = \emptyset$ ami azt jelenti, hogy az $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ halmaznak f_η nem torlódási pontja X-ben. Mivel $A \in [c]^\omega, \eta < c$ tetszőlegesek voltak, így kapjuk, hogy X-ben minden megszámlálható altér zárt diszkrét. ■
Ebben a példa nem M1 így felmerül a kérdés, hogy van-e M1 tér ami tudja a fentieket. (CH) esetén van ilyen térre transzfinit konstrukció ω_1 számosságú alaphalmazon. További kérdések:

(1) (MA)-ból vagy forszolással kapható-e ω_1 számosságúnál nagyobb példa?

(2) Menet közben kiderült, hogy ha X M1 és balszeparált ω_1 típusban, akkor nincs benne sűrű relatíve megszámlálhatóan kompakt altér. Kérdés, hogy nagyobb típusban balszeparált terekre igaz-e ez. Ebből megfogalmazható (1) egy lehetséges gyengítése: (MA)-ból vagy forszolással kapható-e ω_1-nél nagyobb számosságú M1, balszeparált, pszeudokompakt X tér?

Hivatkozások

[1] J.E. Baumgartner, S. Shelah (1987), Remarks on superatomic Boolean algebras, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 33