Forszolás alkalmazása topologikus terek konstruálására

Székely Ákos
Témavezető: Soukup Lajos

2022

Diszpergált terek

Legyen (X, τ) topologikus tér.

Diszpergált terek

Legyen (X, τ) topologikus tér.

- X diszpergált, ha $\forall Y \subset X : iso(Y) \neq \emptyset$

Diszpergált terek

Legyen (X, τ) topologikus tér.

- X diszpergált, ha $\forall Y \subset X : iso(Y) \neq \emptyset$
- X számosságsorozata: $SEC(X) := \langle |I_\alpha| : \alpha < ht(X) \rangle$

Diszpergált terek

Legyen (X, τ) topologikus tér.

- X diszpergált, ha $\forall Y \subset X : iso(Y) \neq \emptyset$
- X számosságsorozata: $SEC(X) := \langle |I_\alpha| : \alpha < ht(X) \rangle$
- LCS $=$ locally compact scattered

Diszpergált terek

Legyen (X, τ) topologikus tér.

- X diszpergált, ha $\forall Y \subset X : iso(Y) \neq \emptyset$
- X számosságsorozata: $SEC(X) := \langle |I_\alpha| : \alpha < ht(X) \rangle$
- LCS $=$ locally compact scattered
- Kérdés: van-e X LCS, 0 dimenziós tér, melyre $SEC(X) = \langle \omega \rangle_{\omega_1}$?

Diszpergált terek

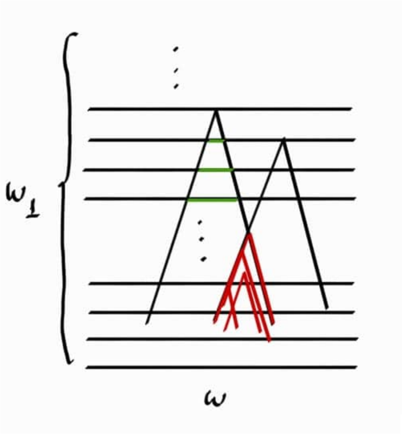
Legyen (X, τ) topologikus tér.

- X diszpergált, ha $\forall Y \subset X : iso(Y) \neq \emptyset$
- X számosságsorozata: $SEC(X) := \langle |I_\alpha| : \alpha < ht(X) \rangle$
- LCS $=$ locally compact scattered
- Kérdés: van-e X LCS, 0 dimenziós tér, melyre $SEC(X) = \langle \omega \rangle_{\omega_1}$?

Állítás.

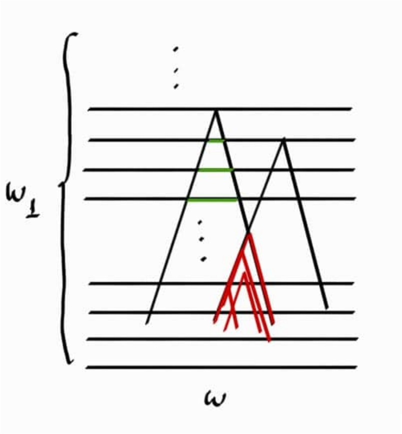
Con(ZFC $+ \exists (X, \tau) : LCS,\ 0\ dim.,\ SEC(X) = \langle \omega \rangle_{\omega_1}$*)*

Diszpergált terek



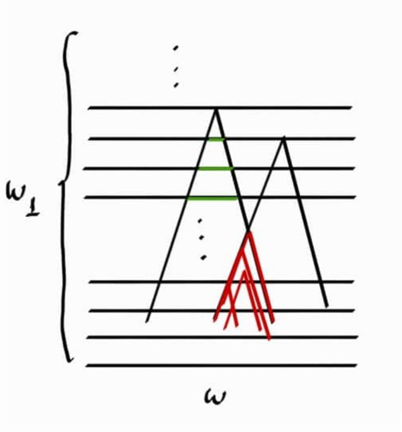
- cél: $X = \omega \times \omega_1$-en egy $\{V(n,\alpha) : n \in \omega, \alpha \in \omega_1\}$ „kúprendszer”, melyre:

Diszpergált terek



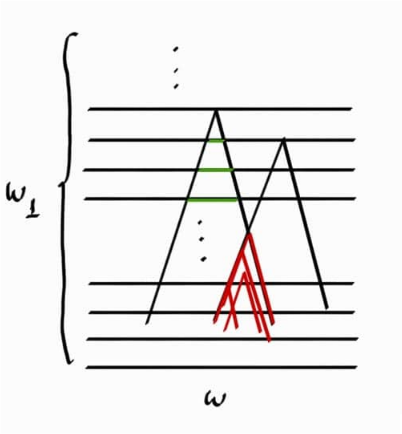
- cél: $X = \omega \times \omega_1$-en egy $\{V(n,\alpha) : n \in \omega, \alpha \in \omega_1\}$ „kúprendszer”, melyre:
- $(m,\beta) \in V(n,\alpha) \to V(m,\beta) \subset V(n,\alpha)$

Diszpergált terek



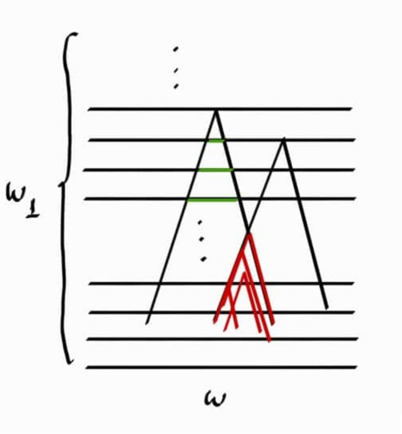
- cél: $X = \omega \times \omega_1$-en egy $\{V(n,\alpha) : n \in \omega, \alpha \in \omega_1\}$ „kúprendszer”, melyre:
- $(m,\beta) \in V(n,\alpha) \to V(m,\beta) \subset V(n,\alpha)$
- $\forall \beta < \alpha : |V(n,\alpha) \cap \omega \times \{\beta\}| = \omega$

Diszpergált terek



- cél: $X = \omega \times \omega_1$-en egy $\{V(n,\alpha) : n \in \omega, \alpha \in \omega_1\}$ „kúprendszer”, melyre:
- $(m,\beta) \in V(n,\alpha) \to V(m,\beta) \subset V(n,\alpha)$
- $\forall \beta < \alpha : |V(n,\alpha) \cap \omega \times \{\beta\}| = \omega$
- két kúp metszete előáll véges sok kúp uniójaként

Diszpergált terek



- cél: $X = \omega \times \omega_1$-en egy $\{V(n,\alpha) : n \in \omega, \alpha \in \omega_1\}$ „kúprendszer”, melyre:
- $(m,\beta) \in V(n,\alpha) \to V(m,\beta) \subset V(n,\alpha)$
- $\forall \beta < \alpha : |V(n,\alpha) \cap \omega \times \{\beta\}| = \omega$
- két kúp metszete előáll véges sok kúp uniójaként
- $\{V(n,\alpha), X \setminus V(n,\alpha) : n,\alpha\}$ szubbázisa egy τ topológiának a kívánt tulajdonságokkal

Diszpergált terek

Állítás.

Con(ZFC $+ \exists(X,\tau) : LCS,\ 0\ dim.,\ SEC(X) = \langle\omega_1\rangle_{\omega_2}$*)*

Állítás. (Shelah, Baumgartner)

Con(ZFC $+ \exists(X,\tau) : LCS,\ 0\ dim.,\ SEC(X) = \langle\omega\rangle_{\omega_2}$*)*

Pszeudokompaktság és megszámlálható kompaktság

Legyen (X, τ) topologikus tér.

- X pszeudokompakt, ha $\forall f \in C(X; \mathbb{R})$ korlátos

Pszeudokompaktság és megszámlálható kompaktság

Legyen (X, τ) topologikus tér.

- X pszeudokompakt, ha $\forall f \in C(X; \mathbb{R})$ korlátos
- X megszámlálhatóan kompakt, ha $\forall A \in [X]^{\omega}$ esetén $A' \neq \emptyset$

Pszeudokompaktság és megszámlálható kompaktság

Legyen (X, τ) topologikus tér.

- X pszeudokompakt, ha $\forall f \in C(X;\mathbb{R})$ korlátos
- X megszámlálhatóan kompakt, ha $\forall A \in [X]^{\omega}$ esetén $A^{'} \neq \emptyset$
- kompaktság természetes gyengítései

Pszeudokompaktság és megszámlálható kompaktság

Legyen (X, τ) topologikus tér.

- X pszeudokompakt, ha $\forall f \in C(X; \mathbb{R})$ korlátos
- X megszámlálhatóan kompakt, ha $\forall A \in [X]^{\omega}$ esetén $A^{'} \neq \emptyset$
- kompaktság természetes gyengítései
- megszámlálhatóan kompakt $\rightarrow$ akkor pszeudokompakt

Legyen (X, τ) topologikus tér.

- X pszeudokompakt, ha $\forall f \in C(X; \mathbb{R})$ korlátos
- X megszámlálhatóan kompakt, ha $\forall A \in [X]^{\omega}$ esetén $A^{'} \neq \emptyset$
- kompaktság természetes gyengítései
- megszámlálhatóan kompakt $\rightarrow$ akkor pszeudokompakt
- A megfordítás nem igaz (Ψ-**tér**): legyen $\mathscr{A} \in [\omega]^{\omega}$ MAD rendszer és legyen $\Psi = \omega \cup \mathscr{A}$. ω elemei legyenek izoláltak és egy $A \in \mathscr{A}$ pont környezetbázisa legyen $\{(A \setminus S) \cup \{A\} : S \in [\omega]^{<\omega}\}$. Ekkor Ψ T2, M1, 0 dim., pszeudokompakt de nem megszámlálhatóan kompakt.

Pszeudokompaktság és megszámlálható kompaktság

- $\mathscr{A}$ nagy (2^ω-s) zárt diszkrét altér Ψ-ben; kérdés: van-e olyan X példa, melyre $e(X) = \omega$ (azaz X bármely zárt diszkrét altere megszámlálható)?

Pszeudokompaktság és megszámlálható kompaktság

- $\mathscr{A}$ nagy (2^ω-s) zárt diszkrét altér Ψ-ben; kérdés: van-e olyan X példa, melyre $e(X) = \omega$ (azaz X bármely zárt diszkrét altere megszámlálható)?

Állítás. (L. Soukup, I. Juhász, Z. Szentmiklóssy)

(ZFC) $\exists(X, \tau)$ *M1, 0 dimenziós, T2 pszeudokompakt de nem megszámlálhatóan kompakt tér melyre* $e(X) = \omega$.

Pszeudokompaktság és megszámlálható kompaktság

- $\mathscr{A}$ nagy (2^ω-s) zárt diszkrét altér Ψ-ben; kérdés: van-e olyan X példa, melyre $e(X) = \omega$ (azaz X bármely zárt diszkrét altere megszámlálható)?

Állítás. (L. Soukup, I. Juhász, Z. Szentmiklóssy)

(ZFC) $\exists (X, \tau)$ *M1, 0 dimenziós, T2 pszeudokompakt de nem megszámlálhatóan kompakt tér melyre* $e(X) = \omega$.

- $e(X) = \omega$ erősíthető-e $s(X) = \omega$-ra?

Pszeudokompaktság és megszámlálható kompaktság

- $\mathscr{A}$ nagy (2^ω-s) zárt diszkrét altér Ψ-ben; kérdés: van-e olyan X példa, melyre $e(X) = \omega$ (azaz X bármely zárt diszkrét altere megszámlálható)?

Állítás. (L. Soukup, I. Juhász, Z. Szentmiklóssy)

(ZFC) $\exists(X, \tau)$ *M1, 0 dimenziós, T2 pszeudokompakt de nem megszámlálhatóan kompakt tér melyre* $e(X) = \omega$.

- $e(X) = \omega$ erősíthető-e $s(X) = \omega$-ra?
- nem: ilyen X S-teret (T3, öröklődően szeparábilis, nem Lindelöf) amiről ismert, hogy létezése független ZFC-től

Pszeudokompaktság és megszámlálható kompaktság

- $\omega \subset \Psi$ sűrű, relatíve megszámlálhatóan kompakt; kérdés: van-e olyan X példa, melyben nincs sűrű, relatíve megszámlálhatóan kompakt altér? Van:

Pszeudokompaktság és megszámlálható kompaktság

- $\omega \subset \Psi$ sűrű, relatíve megszámlálhatóan kompakt; kérdés: van-e olyan X példa, melyben nincs sűrű, relatíve megszámlálhatóan kompakt altér? Van:

Állítás.

(ZFC) $\exists X \in [{}^{c}2]^{c}$ *mely* $\mathscr{G}_\delta$*-sűrű* ${}^{c}2$*-ben (azaz, elmetsz minden nemüres* $\mathscr{G}_\delta$*-t) és* $\forall A \in [X]^{\omega}$: *A zárt diszkrét az X altérben.*

Pszeudokompaktság és megszámlálható kompaktság

- $\omega \subset \Psi$ sűrű, relatíve megszámlálhatóan kompakt; kérdés: van-e olyan X példa, melyben nincs sűrű, relatíve megszámlálhatóan kompakt altér? Van:

Állítás.

(ZFC) $\exists X \in [{}^{c}2]^{c}$ *mely* $\mathcal{G}_\delta$*-sűrű* ${}^{c}2$*-ben (azaz, elmetsz minden nemüres* $\mathcal{G}_\delta$*-t) és* $\forall A \in [X]^{\omega}$: *A zárt diszkrét az X altérben.*

- a fenti példa nem M1; van-e M1 példa?

Pszeudokompaktság és megszámlálható kompaktság

- $\omega \subset \Psi$ sűrű, relatíve megszámlálhatóan kompakt; kérdés: van-e olyan X példa, melyben nincs sűrű, relatíve megszámlálhatóan kompakt altér? Van:

Állítás.

(ZFC) $\exists X \in [{}^{\mathfrak{c}}2]^{\mathfrak{c}}$ mely $\mathscr{G}_\delta$-sűrű ${}^{\mathfrak{c}}2$-ben (azaz, elmetsz minden nemüres $\mathscr{G}_\delta$-t) és $\forall A \in [X]^\omega$: A zárt diszkrét az X altérben.

- a fenti példa nem M1; van-e M1 példa?
- (L. Soukup)(CH) esetén van ilyen térre transzfinit konstrukció ω_1-en

Pszeudokompaktság és megszámlálható kompaktság

- $\omega \subset \Psi$ sűrű, relatíve megszámlálhatóan kompakt; kérdés: van-e olyan X példa, melyben nincs sűrű, relatíve megszámlálhatóan kompakt altér? Van:

Állítás.

(ZFC) $\exists X \in [{}^{c}2]^{c}$ mely $\mathcal{G}_\delta$-sűrű ${}^{c}2$-ben (azaz, elmetsz minden nemüres $\mathcal{G}_\delta$-t) és $\forall A \in [X]^\omega$: A zárt diszkrét az X altérben.

- a fenti példa nem M1; van-e M1 példa?
- (L. Soukup)(CH) esetén van ilyen térre transzfinit konstrukció ω_1-en
- ennek alapján (CH) helyett (MA)-ból vagy forszolással lehet-e kapni nagyobb számosságú ilyen teret? Ilyen tér számosságára felső becslés?