Elemrendek összege véges csoportokban

Szőnyi Laura

1. Bevezetés

Az előző félévben elkezdett témát folytattam, mely az elemrendek összegének néhány tulajdonságát vizsgálta véges csoportokban. Ehhez több, az eredeti Marcel Herzog, Patrizia Longobardi, Mercede Maj: *An exact upper bound for sums of element orders in non-cyclic finite groups* című írásra hivatkozó cikket vettem alapul, melyek a $\Psi(G)$ illetve hozzá hasonló függvények további tulajdonságait vizsgálták.

2. Előzetes eredmények

Jelölje C_n az n elemű ciklikus csoportot, $\Psi(G) = \sum_{g \in G} o(g)$ a G csoport elemrendjeinek összegét, n a G véges csoport rendjét.

A múlt félévben szerepeltek az alább következő tételek.

Könnyen látható, hogy ha G nem ciklikus n rendű csoport, akkor az elemrendjeinek összege kevesebb, mint a ciklikus csoportban, ugyanakkor ennél több is állítható:

2.1. Tétel. *Ha G nem ciklikus, n rendű csoport, akkor* $\Psi(G) \leq \frac{7}{11}\Psi(C_n)$.

Sokszor használt összefüggés, hogy hogyan kell prímhatványrendű ciklikus csoport elemrendösszegét kiszámítani:

2.2. Tétel. *Ha $n = p^r$, azaz prímhatvány, akkor* $\Psi(C_n) = \frac{p^{2r+1}+1}{p+1}$.

Szerepelt a következő becslés is, amit átrendezve alsó becslést kaphatunk $\frac{\Psi(G)}{n \cdot \varphi(n)}$-re:

2.3. Tétel. *Legyen q az n legkisebb prímosztója. Ekkor* $\Psi(G) \geq \frac{n}{q}\varphi(n)$.

Egyszerűen látható, hogy ciklikus csoportokra $1 < \frac{\Psi(C_n)}{n \cdot \varphi(n)}$, több lépésben jött ki a felső becslés:

2.4. Tétel. *Ha $n > 1$, akkor* $1 < \frac{\Psi(C_n)}{n \cdot \varphi(n)} < \gamma = 1,9436\ldots$.

3. Alsó becslés a $\frac{\Psi(G)}{n\cdot\varphi(n)}$ értékére

Legyen $\Psi''(G) = \frac{\Psi(G)}{|G|^2}$. Könnyen látható, hogy $0 \leq \Psi''(G) \leq 1$. Ennek bizonyos tulajdonságait Marius Tărnăuceanu vizsgálta *Detecting Structural Properties of Finite Groups by the Sum of Element Orders* cikkében, ahol felső korlátot adott bizonyos tulajdonságokkal nem rendelkező csoportokon vett értékére.

3.1. Tétel. *Legyen G véges csoport, ekkor teljesülnek a következő állítások:*

- *Ha* $\Psi''(G) > \frac{7}{16} = \Psi''(C_2^2)$*, akkor G ciklikus.*
- *Ha* $\Psi''(G) > \frac{27}{64} = \Psi''(Q_8)$*, akkor G Abel.*
- *Ha* $\Psi''(G) > \frac{13}{36} = \Psi''(S_3)$*, akkor G nilpotens.*
- *Ha* $\Psi''(G) > \frac{31}{144} = \Psi''(A_4)$*, akkor G szuperfeloldható.*
- *Ha* $\Psi''(G) > \frac{211}{3600} = \Psi''(A_5)$*, akkor G feloldható.*

A $\Psi''(G)$ és a múlt félévben vizsgált $f(G) = \frac{\Psi(G)}{\varphi(G)\cdot|G|}$ közti látszólagos hasonlóság miatt felvetődik annak a lehetősége, hogy hasonló tételt próbáljunk $f(G)$-re kimondani. Számítógépes kalkulációk alapján azonban sejthető, hogy ez esetben nem lesz olyan felső határ, amit egy adott csoport (a fenti tétel analogonjaként) fel is vesz, ugyanakkor konnyen látható, hogy adható korlát, amit nem lép át nem-ciklikus csoport. A számolásokhoz szükség lesz az alábbi tételekre.

Tudjuk, hogy adott n-re $\Psi(G)$ akkor maximális, ha G ciklikus. Felvetül a kérdés, hogy a második legnagyobb értéket mikor veszi fel a Ψ függvény, ezt vizsgálta Marcel Herzog, Patrizia Longobardi és Mercede Maj *The second maximal groups with respect to the sum of element orders* és *Sums of element orders in groups of order* $2m$ *with m odd* cikkeikben.

Általánosan az alábbi tétel mondható ki:

3.2. Tétel. *Ha* $G \not\cong C_n$*, q az n legkisebb prímosztója, akkor* $\Psi(G) \leq \frac{((q^2-1)q+1)(q+1)}{q^5+1}\Psi(C_n)$*, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha* $G = C_q^2 \times C_k$ *ahol* $n = q^2k$, $(q,k) = 1$.

A $q = 2$ esetre a korábban látott $\frac{7}{11}$ értéket adja a tört. Ha a csoport rendje osztható 4-gyel, de 8-cal nem, akkor van olyan csoport, ami felveszi ezt az értéket.

Ha a csoport rendje páros, de nem osztható 4-gyel, akkor igazak a következő állítások:

3.3. Tétel. *Ha* $n = 2m$*, ahol m páratlan,* $G \not\cong C_n$*, akkor* $\Psi(G) \leq \frac{13}{21} \cdot \Psi(C_n)$*, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha* $G \cong S_3 \times C_k$*, ahol* $(k, 6) = 1$.

3.4. Tétel. *Ha* $n = 2m$*, ahol* $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i}$ *páratlan,* $G \not\cong C_n$*,* $l = min\{p_i^{\alpha_i}\}$*, akkor* $\Psi(G) \leq (\frac{1}{3} + \frac{2\cdot l}{3\cdot\Psi(C_l)}) \cdot \Psi(C_n)$*, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha* $G \cong D_{2l} \times C_{\frac{n}{2l}}$.

Ez utóbbi tétel $l = 3$-ra az előbbi tételben szereplő eredményt adja, azaz $\Psi(G) \leq \frac{13}{21} \cdot \Psi(C_n)$ hogyha n osztható 3-mal, de 9-cel nem.

Ezek segítségével már bebizonyítható a következő állítás:

3.5. Tétel. *Ha $f(G) > 1,2031$, akkor G ciklikus.*

Bizonyítás. Mint azt az előző félévben láttuk teljesül az alábbi:

$$\frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} = \prod_{p|n} \frac{\Psi(C_{p^{r_p}})}{p^{r_p}\varphi(p^{r_p})} = \prod_{p|n} \frac{p^{2r_p+1}+1}{(p^2-1)p^{2r_p-1}} \leq \prod_{p|n} \frac{p^3+1}{p^3-p} < \gamma$$

Páros n esetén az alábbi alakba írható át:

$$\frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} = \frac{2^{2r_2+1}+1}{3\cdot 2^{2r_2-1}} \cdot \prod_{p|n,p>2} \frac{p^{2r_p+1}+1}{(p^2-1)p^{2r_p-1}} \leq \frac{3}{2} \cdot \prod_{p|n,p>2} \frac{p^3+1}{p^3-p} < \gamma$$

Ha n osztható 4-gyel, akkor igaz az alábbi:

$$\frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} = \frac{2^{2r_2+1}+1}{3\cdot 2^{2r_2-1}} \cdot \prod_{p|n,p>2} \frac{p^{2r_p+1}+1}{(p^2-1)p^{2r_p-1}} \leq \frac{11}{8} \cdot \prod_{p|n,p>2} \frac{p^3+1}{p^3-p} < \frac{\frac{11}{8}}{\frac{3}{2}} \cdot \gamma = \frac{11}{12} \cdot \gamma$$

Ha n páratlan, akkor teljesül a következő becslés:

$$\frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} = \prod_{p|n,p>2} \frac{p^{2r_p+1}+1}{(p^2-1)p^{2r_p-1}} \leq \prod_{p|n,p>2} \frac{p^3+1}{p^3-p} < \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot \gamma = \frac{2}{3} \cdot \gamma$$

Most tekintsük, hogy az egyes esetekben mekkora lehet adott n-re a második legnagyobb elemrend-összegű csoportra az $f(G)$ értéke. Mivel adott n-re $n \cdot \varphi(n)$ állandó, így az $f(G)$ értéke is ezekben az esetekben lesz második legnagyobb. Legyen a továbbiakban G nem ciklikus n rendű csoport.

Ha n páratlan, akkor ugyan nem tudjuk, hogy pontosan mekkora a második érték, viszont tudunk rá felső becslést adni, így adódik az alábbi:

$$\frac{\Psi(G)}{n\varphi(n)} \leq \frac{7}{11} \cdot \frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} < \frac{7}{11} \cdot \frac{2}{3} \cdot \gamma = \frac{14}{33} \cdot \gamma = 0,8245\ldots$$

Ha n páros, de nem osztható 4-gyel, akkor teljesül a következő:

$$\frac{\Psi(G)}{n\varphi(n)} \leq \frac{13}{21} \cdot \frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} < \frac{13}{21} \cdot \gamma = 1,2031\ldots$$

Könnyen meggondolható, hogy a fenti esetben az egyenlőtlenség éles, ugyanis van olyan sorozata a csoportoknak, amelyre az $f(G)$ értéke az adott felső korláthoz konvergál, nevezetesen $G \cong S_3 \times C_k$, ahol $k = \frac{n}{6}$, n az első l darab prímszám szorzata.

Ha n osztható 4-gyel, akkor ismét tudunk egy felső becslést adni:

$$\frac{\Psi(G)}{n\varphi(n)} \leq \frac{7}{11} \cdot \frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} < \frac{7}{11} \cdot \frac{11}{12} \cdot \gamma = \frac{7}{12} \cdot \gamma = 1,1337\ldots$$

A fenti három eset lefedi az összes lehetőséget, így megállapítható, hogy $f(G) > \frac{13}{21} \cdot \gamma$ esetben G bizonyosan ciklikus. □

A bizonyításból látható, hogy mivel S_3 nem Abel és nem is nilpotens, ezért ezekre az esetekre is ugyanez a korlát mondható.

A szuperfeloldható és feloldható esetekre a számítógépes számítások alapján hasonló módon adható korlát, várhatóan egy olyan csoport-sorozatra, amely rendje az első l prímszám szorzatának kétszerese.

4. Az elemrendek összegének egy lehetséges általánosítása

Jelölje G egy H részcsoportjára $\Psi_H(G) = \sum_{g \in G} o_H(g)$ ahol $o_H(g)$ az a legkisebb m szám, amire $g^m \in H$. Látható, hogy ez $H = 1$-re az elemrendek összegét adja. Ennek bizonyos tulajdonságait vizsgálta Marius Tărnăuceanu *A Generalization of a Result on the Sum of Element Orders of a Finite Group* című cikkében, a fő állítása a következő:

4.1. Tétel. *Ha G nilpotens, $H \leq G$, $|H| = m$, H_m az C_n m-rendű részcsoportja, akkor* $\Psi_H(G) \leq \Psi_{H_m}(C_n)$.

Könnyen látható, hogy $N \triangleleft G$, $|N| = k$ esetén $o_N(g) = o(gN)$ a G/N csoportban, így $\Psi_N(G) = |H| \cdot \Psi(G/H) \leq k \cdot \Psi(C_n) = \Psi_{C_k}(C_n)$.

A cikkben szerepeltek továbbá az alábbi, számolást segítő állítások is.

4.2. Tétel. *Ha a $G_1, \ldots, G_k$ csoportoknak páronként relatív prím rendűek és $H_i \leq G_i$, akkor* $\Psi_{H_1 \times \ldots \times H_k}(G_1 \times \ldots \times G_k) = \prod_{i=1}^{k} \Psi_{H_i}(G_i)$.

4.1. Következmény. *Ha G véges nilpotens csoport, G_i a G-nek p_i-Sylow részcsoportjai, és $H = H_1 \times \ldots \times H_k \leq G$, akkor* $\Psi_H(G) = \prod_{i=1}^{k} \Psi_{H_i}(G_i)$.

4.3. Tétel. *Ha G véges csoport és $H \triangleleft K \leq G$, akkor* $\Psi_H(G) \leq |K : H| \cdot \Psi_K(G) - |K| + |H|$.

4.2. Következmény. *Ha G véges p-csoport, $H \leq K \leq G$, $|H| = p^m$, $|K| = p^{m+1}$, akkor* $\Psi_H(G) \leq p \cdot \Psi_K(G) - p^m \cdot (p-1)$.

4.4. Tétel. *Ha G rendje p^n, ahol p prím, H ennek p^m rendű részcsoportja, akkor* $\Psi_H(G) \leq \Psi_{C_{p^m}}(C_{p^n})$.

Felmerül a kérdés, hogy a fő tételben valóban szükséges-e megkövetelni, hogy G nilpotens legyen. A szerzők sejtése szerint nem, és minden véges csoportra igaz a tétel. Az alábbiakban látható, hogy ez nem igaz.

Legyen $p = 2^k - 1$ alakú Mersenne-prím, K a 2^k elemű test, ekkor ennek multiplikatív csoportja ciklikus, méghozzá $K^\times \simeq C_p$. Tekintsük a $G = \{ax + b | a \in K^\times, b \in K\}$, a K-ból K-ba menő invertálható affin függvények csoportját. Ennek normálosztója az eltolások alkotta $N = \{x + b | b \in K\}$ csoport, részcsoportja a $H = \{ax | a \in K^\times\}$, azaz az invertálható lineáris függvények csoportja, és $G \simeq N \rtimes H$.

Ekkor G Frobenius csoport, mert tranzitív, nem reguláris és az egységelemen kívül minden permutációnak legfeljebb egy fixpontja van, így felírható $G = \{N \setminus 1\} \cup \bigcup_{g \in G} (H^g \setminus 1) \cup 1$ alakban, ahol ezek mind diszjunktak egymástól.

Egy $n \in N \setminus 1$ elem rendje $o(n) = 2$, így $o_H(n) = 2$, egy $g \notin N$ elem rendje $o(g) = p$, így ha $g \notin H \cup N$, akkor $o_H(g) = p$.

$$\Psi_H(G) = \sum_{h \in H} 1 + \sum_{n \in N \setminus 1} o_H(n) + \sum_{g \notin H \cup N} o_H(g) = p \cdot 1 + p \cdot 2 + (p^2 - p) \cdot p = p^3 - p^2 + 3 \cdot p$$

Ugyanakkor az $n = p \cdot 2^k$ rendű ciklikus csooport p rendű részcsoportját tekintve a következő teljesül:

$$\Psi_{C_p}(C_n) = p \cdot \Psi(C_{2^k}) = p \cdot \frac{2^{2k+1} + 1}{2 + 1} = p \cdot \frac{2 \cdot (p+1)^2 + 1}{3} = \frac{2}{3} \cdot p^3 + \frac{4}{3} \cdot p^2 + p$$

$p > 6$ esetén $p^3 - p^2 + 3 \cdot p > \frac{2}{3} \cdot p^3 + \frac{4}{3} \cdot p^2 + p$, azaz $\Psi_H(G) > \Psi_{C_p}(C_n)$ a 3 kivételével az összes Mersenne-prímre.

5. Irodalomjegyzék

Marcel Herzog, Patrizia Longobardi, Mercede Maj. *An exact upper bound for sums of element orders in non-cyclic finite groups*. https://arxiv.org/pdf/1610.03669.pdf

Marius Tărnăuceanu. *Detecting Structural Properties of Finite Groups by the Sum of Element Orders*. Israel Journal of Mathematics 238 (2020), 629–637.

Marcel Herzog, Patrizia Longobardi, Mercede Maj. *The second maximal groups with respect to the sum of element orders*. Journal of Pure and Applied Algebra 225 (2021) 106531.

Marcel Herzog, Patrizia Longobardi, Mercede Maj. *Sums of element orders in groups of order 2m with m odd*. Communications in Algebra, 47:5, 2035-2048.

Marius Tărnăuceanu. *A Generalization of a Result on the Sum of Element Orders of a Finite Group*. Math. Slovaca 71 (2021), No. 3, 627–630.