Elemrendek összege véges csoportokban

Előzetes eredmények

Definició

Legyen G véges csoport, ekkor $\Psi(G) = \sum_{g \in G} o(g)$ jelöli az elemrendjeinek összegét.

Tétel

Ha G nem ciklikus, n rendű csoport, akkor $\Psi(G) \leq \frac{7}{11}\Psi(C_n)$.

Tétel

Ha $n = p^r$, azaz prímhatvány, akkor $\Psi(C_n) = \frac{p^{2r+1}+1}{p+1}$.

Tétel

Legyen q az n legkisebb prímosztója. Ekkor $\Psi(G) \geq \frac{n}{q}\varphi(n)$.

Tétel

Ha $n > 1$, akkor $1 < \frac{\Psi(C_n)}{n \cdot \varphi(n)} < \gamma = 1,9436\ldots$.

Előzetes eredmények

Definició

Legyen G véges csoport és jelölje $\Psi''(G) = \frac{\Psi(G)}{|G|^2}$.

Tétel

Legyen G véges csoport, ekkor teljesülnek a következő állítások:

- *Ha $\Psi''(G) > \frac{7}{16} = \Psi''(C_2^2)$, akkor G ciklikus.*
- *Ha $\Psi''(G) > \frac{27}{64} = \Psi''(Q_8)$, akkor G Abel.*
- *Ha $\Psi''(G) > \frac{13}{36} = \Psi''(S_3)$, akkor G nilpotens.*
- *Ha $\Psi''(G) > \frac{31}{144} = \Psi''(A_4)$, akkor G szuperfeloldható.*
- *Ha $\Psi''(G) > \frac{211}{3600} = \Psi''(A_5)$, akkor G feloldható.*

Előzetes eredmények

Tétel

Ha $G \ncong C_n$, q *az* n *legkisebb prímosztója, akkor* $\Psi(G) \leq \frac{((q^2-1)q+1)(q+1)}{q^5+1}\Psi(C_n)$, *és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha* $G = C_q^2 \times C_k$ *ahol* $n = q^2k$, $(q,k) = 1$.

Tétel

Ha $n = 2m$, *ahol* m *páratlan,* $G \ncong C_n$, *akkor* $\Psi(G) \leq \frac{13}{21} \cdot \Psi(C_n)$, *és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha* $G \cong S_3 \times C_k$, *ahol* $(k,6) = 1$.

Tétel

Ha $n = 2m$, *ahol* $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i}$ *páratlan,* $G \ncong C_n$, $l = min\{p_i^{\alpha_i}\}$, *akkor* $\Psi(G) \leq (\frac{1}{3} + \frac{2 \cdot l}{3 \cdot \Psi(C_l)}) \cdot \Psi(C_n)$, *és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha* $G \cong D_{2l} \times C_{\frac{n}{2l}}$.

$\frac{\Psi(G)}{n\varphi(n)} > 1,2031$ ciklikus

Ha n páros:

$$\frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} = \frac{2^{2r_2+1}+1}{3\cdot 2^{2r_2-1}} \cdot \prod_{p|n,p>2} \frac{p^{2r_p+1}+1}{(p^2-1)p^{2r_p-1}} \leq \frac{3}{2} \cdot \prod_{p|n,p>2} \frac{p^3+1}{p^3-p} < \gamma$$

Ha n osztható 4-gyel:

$$\frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} = \frac{2^{2r_2+1}+1}{3\cdot 2^{2r_2-1}} \cdot \prod_{p|n,p>2} \frac{p^{2r_p+1}+1}{(p^2-1)p^{2r_p-1}} \leq \frac{11}{8} \cdot \prod_{p|n,p>2} \frac{p^3+1}{p^3-p} < \frac{11}{12} \cdot \gamma$$

Ha n páratlan:

$$\frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} = \prod_{p|n,p>2} \frac{p^{2r_p+1}+1}{(p^2-1)p^{2r_p-1}} \leq \prod_{p|n,p>2} \frac{p^3+1}{p^3-p} < \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot \gamma = \frac{2}{3} \cdot \gamma$$

Második legnagyobb értékek

Ha n páratlan:

$$\frac{\Psi(G)}{n\varphi(n)} \leq \frac{7}{11} \cdot \frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} < \frac{7}{11} \cdot \frac{2}{3} \cdot \gamma = \frac{14}{33} \cdot \gamma = 0,8245\ldots$$

Ha n páros, de nem osztható 4-gyel:

$$\frac{\Psi(G)}{n\varphi(n)} \leq \frac{13}{21} \cdot \frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} < \frac{13}{21} \cdot \gamma = 1,2031\ldots$$

Ha n osztható 4-gyel:

$$\frac{\Psi(G)}{n\varphi(n)} \leq \frac{7}{11} \cdot \frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} < \frac{7}{11} \cdot \frac{11}{12} \cdot \gamma = \frac{7}{12} \cdot \gamma = 1,1337\ldots$$

$\frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} > 1,2031$ ciklikus

- Ha $G \cong S_3 \times C_k$, ahol $k = \frac{n}{6}$, n az első l darab prímszám szorzata, akkor $f(G) \longrightarrow \frac{13}{21} \cdot \gamma$ ha $n \longrightarrow \infty$.
- S_3 nem Abel és nem is nilpotens, így ezekre az esetekre is ugyanez a korlát mondható.

Előzetes eredmények

Definició

Jelölje G egy H részcsoportjára $\Psi_H(G) = \sum_{g \in G} o_H(g)$ ahol $o_H(g)$ az a legkisebb m szám, amire $g^m \in H$.

Tétel

Ha G nilpotens, $H \leq G$, $|H| = m$, H_m az C_n m-rendű részcsoportja, akkor $\Psi_H(G) \leq \Psi_{H_m}(C_n)$.

Ha $N \triangleleft G$, $|N| = k$, akkor $\Psi_N(G) = \Psi_{C_k}(C_n)$.

Tétel

Ha a $G_1, \ldots, G_k$ csoportoknak páronként relatív prím rendűek és

$H_i \leq G_i$, akkor $\Psi_{H_1 \times \ldots \times H_k}(G_1 \times \ldots \times G_k) = \prod_{i=1}^{k} \Psi_{H_i}(G_i)$.

Következmény

Ha G véges nilpotens csoport, G_i a G-nek p_i-Sylow részcsoportjai, és

$H = H_1 \times \ldots \times H_k \leq G$, akkor $\Psi_H(G) = \prod_{i=1}^{k} \Psi_{H_i}(G_i)$.

Előzetes eredmények

Tétel

Ha G véges csoport és $H \triangleleft K \leq G$, akkor
$\Psi_H(G) \leq |K:H| \cdot \Psi_K(G) - |K| + |H|$.

Következmény

Ha G véges p-csoport, $H \leq K \leq G$, $|H| = p^m$, $|K| = p^{m+1}$, akkor
$\Psi_H(G) \leq p \cdot \Psi_K(G) - p^m \cdot (p-1)$.

Tétel

Ha G rendje p^n, ahol p prím, H ennek p^m rendű részcsoportja, akkor
$\Psi_H(G) \leq \Psi_{C_{p^m}}(C_{p^n})$

Sejtés

Ha G véges csoport, $H \leq G$, $|H| = m$, H_m az C_n m-rendű részcsoportja, akkor $\Psi_H(G) \leq \Psi_{H_m}(C_n)$.

Ellenpélda

- $p = 2^k - 1$ Mersenne-prím
- K a 2^k elemű test
- $G = \{ax + b | a \in K^\times, b \in K\}$
- $N = \{x + b | b \in K\}$
- $H = \{ax | a \in K^\times\}$
- $G \simeq N \rtimes H$
- $G = \{N \setminus 1\} \cup \bigcup_{g \in G} (H^g \setminus 1) \cup 1$

$$\Psi_H(G) = \sum_{h \in H} 1 + \sum_{n \in N \setminus 1} o_H(n) + \sum_{g \notin H \cup N} o_H(g) = p^3 - p^2 + 3 \cdot p$$

$$\Psi_{C_p}(C_n) = p \cdot \Psi(C_{2^k}) = p \cdot \frac{2^{2k+1} + 1}{2 + 1} = \frac{2}{3} \cdot p^3 + \frac{4}{3} \cdot p^2 + p$$

Ha $p > 6$, akkor $\Psi_H(G) > \Psi_{C_p}(C_n)$.