Végtelen játékok és a Determináltsági Axióma

Kőrösi Ákos

April 2022

1. Bevezetés

Közismert témakör véges matematikában a matematikai játékok elmélete, speciálisan az az eredmény is, hogy a véges (azaz meghatározott, véges lépésszám alatt biztosan befejeződő) játékokban valamelyik játékos rendelkezik nyerő stratégiával, ezt egy viszonylag egyszerű és természetes címkézőalgoritmussal megmutathatjuk.

A véges esetben használt játékfogalom általánosítható végtelen esetre is, és itt is vizsgálható a nyerő stratégiák létezésének kérdése. Itt viszont már nem olyan egyszerű tételek érvényesek, mint a véges esetben, hanem látni fogjuk, hogy a nyerő stratégiák létezése vagy nemlétezése a kiválasztási axiómával van összefonódva, speciálisan a kiválasztási axióma mellett nem minden játékban van nyerő stratégia. Ha azonban feltesszük, hogy minden játékban van nyerő stratégia – ez a címben is szereplő determináltsági axióma, akkor egy, a kiválasztási axiómának ellentmondó, ám érdekes halmazelméletet kapunk.

2. Jelölések, előzetesen feltételezett fogalmak

A végtelen játékok elméletének felépítésében fontos szerepet kapnak a végtelen fák. Jellemzően egy $A^{\mathbb{N}}$ alakú sorozattéren fogunk dolgozni, ahol A rögzített megszámlálható alaphalmaz. Ehhez hozzárendelhető az A-ból képzett sorozatok fája: a kiinduló csúcs az üres sorozat, és egy adott $a_0, \dots a_n$ sorozat gyermekei az $a_0, \dots a_n, a_{n+1}$ alakú sorozatok - ezáltal egy fa-struktúrába rendeztük a véges sorozatokat. Ezt a fát $A^{<\mathbb{N}}$ jelöli.

Gallyazott fának nevezünk egy olyan ([kijelölt gyökérrel rendelkező, szintezett) fát, ahol minden csúcsnak van leszármazottja.

Ha adott egy $T \subset A^{<\mathbb{N}}$ gallyazott részfa, akkor $[T]$ jelöli azon $A^{\mathbb{N}}$-beli sorozatokat, amelyeknek minden véges kezdőszelete T-beli.

A dolgozatban felhasználok néhány alapvetőbb leíró halmazelméleti állítást, amelyek kifejtése nem férne a keretek közé.

3. Alapfogalmak

Először definiáljuk, hogy hogyan fogunk fel egy végtelen játékot.

Definíció. *Legyen adott egy A nemüres halmaz. Ez lesz a lehetséges lépések halmaza. Továbbá legyen adva egy $X \subset A^{\mathbb{N}}$ halmaz. Definiálunk ezek segítségével egy végtelen játékot, melyet a $G(A, X)$-szel jelölünk.*

A játékosok felváltva lépnek, a lépéseik az A halmaz elemei lehetnek. Végtelen sok lépés után egy $x = (a_0, b_0, a_1, b_1, \dots)$ lépéssorozatot kapunk, mely $A^{\mathbb{N}}$ egy eleme. Ha $x \in X$ akkor az első játékos nyer, ha $x \notin X$, akkor a második.

Ez nem teljesen egyezik a játékokról kialakult intuitív fogalmunkkal, hiszen a játékosok bármikor bármelyik lépést tehetik, semmilyen szabály nem limitálja a lehetséges lépéseket. Hogy a fenti, egyszerűbb definícióval dolgozhassunk, de lássuk, hogy valóban a természetes játékfogalomra vonatkoztathatók az eredményeink, most belátjuk, hogy a "szabályokkal rendelkező" játékok visszavezethetők a fenti, "szabály nélküli" játékfogalomra.

Definíció. *Legyen A nemüres halmaz, ez ismét a lépések halmaza. Legyen adott egy $T \subset A^{\mathbb{N}}$ gallyazott részfa, azaz A-beli véges elemsorozatok olyan halmaza, hogy minden T-beli véges sorozatnak van T-beli kiterjesztése (informálisan tehát minden szabályos pozícióban van legalább egy szabályos lépés). Legyen végül adott egy $X \subset [T]$ halmaz (itt $[T]$) azon végtelen A-sorozatok halmazát jelöli, melyek minden véges kezdőszelete T-beli).*

A játékosok ismét felváltva lépnek, de lépéseiket úgy kell tenniük, hogy mindig $(a_0, b_0, \dots, a_n, b_n) \in T$ (vagy $(a_0, b_0, \dots, a_n) \in T$, lépésszámtól függően) teljesüljön. A lépésekből adódik egy $x = (a_0, b_0, \dots)$ végtelen lépéssorozat. Ha $x \in X$, akkor az első játékos nyer, különben a második.

Ezen játékot $G(T, X)$-szel jelöljük.

Mint fentebb már megjegyeztük, minden szabályokkal rendelkező játék visszavezethető egy (vele ekvivalens) szabályok nélküli játékra. Hogy ezt a megjegyzést precízzé tegyük, bevezetjük az alábbi fogalmakat.

Definíció. *Adott egy $G(T, X)$ játék.* ***Stratégiának*** *nevezzük a $\sigma : A^{<\mathbb{N}} \to A$ leképezéseket.*

Egy ilyen leképezés interpretációja az alábbi. Tegyük fel, hogy az első játékos stratégiájáról van szó. A játékos első lépése $\sigma(\emptyset)$. Válaszoljon erre a második játékos a b_0 lépéssel. Erre az első játékos $\sigma(b_0)$-t lép. Erre adott b_1 válaszlépés esetén a következő lépése $\sigma(b_0, b_1)$ és így tovább. Analóg módon interpretáljuk a második játékosra vonatkozó stratégiákat.

Most bevezetjük a nyerő stratégia fogalmát.

Definíció. *Legyen adott egy $G(T, X)$ játék és egy σ stratégia az első játékos számára. Azt mondjuk, hogy σ* ***nyerő stratégia****, ha a második játékos tetszőleges $b_0, b_1, \dots$ lépéssorozata esetén $(\sigma(\emptyset), b_0, \sigma(b_0), b_1, \sigma(b_0, b_1), \dots) \in X$.*

Hasonló módon értelmezzük, hogy mikor nyerő egy σ stratégia a második játékos számára.

Definíció. *A G és G' játékokat ekvivalensnek nevezzük, ha*

- *az első játékosnak van G-ben nyerő stratégiája $\Leftrightarrow$ az első játékosnak van G'-ben nyerő stratégiája*

- *a második játékosnak van G-ben nyerő stratégiája $\Leftrightarrow$ az első játékosnak van G'-ben nyerő stratégiája*

Állítottuk, hogy a szabályokkal rendelkező játékok visszavezethetőek velük bizonyos értelemben ekvivalens szabályok nélküli játékokra. Ezt az ekvivalenciát a fentebbi definíció szerint értelmezzük, és a visszavezetés például az alábbi módon tehető.

Ezt a következőképpen tehetjük meg. Legyen adott egy $G(T, X)$ szabályokkal rendelkező játék (T egy részfa valamely $A^{<\mathbb{N}}$-en). Ez megfelel azon $G(A, X')$ játéknak ahol A az eredeti lépéshalmaz és $X' = \{x \in A^{\mathbb{N}} : \exists n : x|_n \notin T, \textit{ legkisebb ilyen } n \textit{ páros}\} \cup \{x \in [T], x \in X\}$. Vegyük észre, hogy X' úgy van konstruálva, hogy amennyiben valamelyik játékos egyszer is szabálytalanul lép, akkor veszít. Ezért ha $G(T, X)$-ben valamelyiküknek van nyerő stratégiája, akkor ugyanezen stratégia $G(A, X')$-ben is nyerő, hiszen a másik játékos szabályos lépései mellett nyer a stratégia (hiszen $G(T, X)$-ben nyer), az ellenfél szabályos lépései pedig automatikus győzelmet jelentenek.

És megfordítva, egy $G(T, X)$-beli nyerő stratégia nem írhat elő szabálytalan lépéseket, hiszen azzal automatikusan vesztene a játékos. Ezért a $G(T, X)$ nyerő stratégiája által javasolt lépések megadnak egy nyerő stratégiát $G(A, X')$-ben is.

4. Nyerő stratégiák és a kiválasztási axióma

Mostmár felépítettük a keretrendszert ahhoz, hogy bevezessük a címben is említett determináltsági axiómát.

1. Állítás. *Tetszőleges A és tetszőleges $X \subset A^{\mathbb{N}}$ mellett a $G(A, X)$ játékban az első vagy második játékosnak van nyerő stratégiája.*

1. *Megjegyzés.* Természetesen mindkét játékosnak nem lehet egyszerre nyerő stratégiája. Hiszen ha lenne σ_1 nyerő stratégiája az első játékosnak és σ_2 nyerő stratégiája a második játékosnak, akkor tekinthetnénk a játék azon lefutását, mikor a két stratégia játszik egymás ellen, vagyis az $a_n = \sigma_1(b_0, \ldots, b_{n-1})$ és $b_n = \sigma_2(a_0, \ldots, a_n)$ rekurzív formulákkal megadott lépéssorozatot. Eredményként egy $y = (a_0, b_0, a_1, \ldots)$ sorozatot kapunk. Mivel σ_1 és σ_2 is nyerő stratégia volt, azért egyszerre kellene $y \in X$-nek és $y \notin X$-nek teljesülnie, ami ellentmondás.

2. Állítás. *A kiválasztási axióma és a determináltsági axióma ellentmondanak egymásnak.*

Bizonyítás. Először gondoljuk meg, hogy összesen hány stratégia létezik egy adott $G(A, X)$ játékban egy játékos számára. A stratégiák $\sigma : A^{<\mathbb{N}} \to A$ függvények, ahol A megszámlálható, így $A^{<\mathbb{N}}$ szintén megszámlálható. Ezért $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ stratégia létezik. Legyen $\{\sigma_\alpha : 0 \leq \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ az első játékos stratégiáinak egy felsorolása, míg $\{\tau_\alpha : 0 \leq \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ a második játékos stratégiáinak felsorolása.

Tételezzük fel a kiválasztási axiómát, meg kell mutatnunk, hogy ilyenkor a determináltsági axióma nem teljesül. Mivel igaz a kiválasztási axióma, azért van transzfinit rekurzió. Transzfinit rekurzió segítségével fogunk konstruálni egy X és Y halmazt konstruálni, majd ezek segítségével egy játékot, amiben egyik játékosnak sincs nyerő stratégiája, ami mutatja hogy a determináltsági axióma nem teljesül.

A transzfinit rekurzió az alábbi alakú. Legyen $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ és $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ a halmazok eddig megkonstruált része. Válasszunk y_α-t olyan módon, hogy $y_\alpha = \sigma_\alpha(b)$ legyen, de $y_\alpha \notin \{x_\xi : \xi < \alpha\}$ is teljesüljön. Ez azért tehető meg, mert $y_\alpha \notin \{x_\xi : \xi < \alpha\}$ kisebb mint $2^{\aleph_0}$ méretű, míg $\sigma_\alpha(b)$ mérete $2^{\aleph_0}$.

Analóg módon, legyen x_α-t olyan, hogy $x_\alpha = \tau_\alpha(b)$ legyen, és $x_\alpha \notin \{y_\xi : \xi < \alpha\}$ álljon fenn.

A konstrukcióból világos, hogy X és Y diszjunktak. Az is világos, hogy tetszőleges σ_α stratégiára van b hogy $(b, \sigma_\alpha(b)) \notin X$ (hiszen az a $(b, \sigma_\alpha(b))$ speciálisan Y-beli), és hasonlóan: tetszőleges τ_β esetén van c hogy $(c, \tau_\beta(c)) \notin Y$. (Itt (x, y) jelölte az x és y sorozatok összefésülését – mint ahogy egy játékban tennék meg az x és y komponensei által megadott lépéseket felváltva).

Mindez éppen azt jelenti, hogy a $G(A, X)$ játékban egyik játékosnak sincsen nyerő stratégiája. $\square$

5. Kvázistratégiák

A véges játékok tárgyalása során a fő szempontunk az volt, hogy megtaláljuk az adott játékban a nyerő stratégiát. A végtelen játékok esetén ennél kifinomultabb fogalmakat érdemes használni. A probléma informálisan a következő. A "stratégia" fogalma valami olyasmi hozzárendelés jelent, ami a játék egy adott állapotához hozzárendeli a következőnek megteendő lépést. Azonban több jó lépés is lehetséges, így ha egyetlen lépést akarunk minden álláshoz megadni, akkor lényegében egy kiválasztási függvényt kell megadnunk. Azonban mint beláttul, a kiválasztási axióma ellentmondásban áll a minket érdeklő determináltsági axiómával. Ezért nem tűnik természetesnek feltételezni, hogy a fentebb tárgyalt kiválasztási függvény mindig létezik, vagyis a stratégia nem természetes fogalom ilyen körülmények között.

Természetesebb fogalomnak bizonyul egy gyengébb definíció, az úgynevezett kvázistratégiák használata.

Definíció. *Legyen A egy végtelen halmaz és T egy végtelen gallyazott fa az $A^{\mathbb{N}}$ halmazon. Ekkor T-n vett (az első játékosra vonatkozó) kvázistratégiának nevezünk egy $\Sigma \subset T$ nemüres gallyazott részfát, ha mindig amikor $(x_0, x_1, \dots, x_{2n}) \in \Sigma$ és $(x_0, x_1, \dots, x_{2n+1}) \in T$, akkor $(x_0, x_1, \dots, x_{2n+1}) \in \Sigma$.*

A második játékosra vonatkozó kvázistratégia fogalma ezzel analóg módon adható meg: olyan $\Sigma \subset T$ nemüres gallyazott részfát, ha mindig amikor $(x_0, x_1, \dots, x_{2n+1}) \in \Sigma$ és $(x_0, x_1, \dots, x_{2n+2}) \in T$, akkor $(x_0, x_1, \dots, x_{2n+2}) \in \Sigma$.

2. *Megjegyzés.* A definíció informális értelme a következő. Tegyük fel, hogy az első játékos egy Σ kvázistratégiájáról van szó. A páratlan hosszúságú, azaz $x = (a_0, a_1, \dots, a_{2n})$ alakú Σ-beli csúcsokat érdemes úgy felfogni, mint a kvázistratégia szerint "kedvező" állapotokat. A kvázistratégia definiáló tulajdonsága ekkor garantálja, hogy egy ilyen csúcs minden közvetlen leszármazottja szintén Σ-beli legyen. Viszont mivel Σ-ról kikötöttük hogy gallyazott fa legyen, azért x minden leszármazottjának van szintén Σ-beli leszármazottja. Más szavakkal, ha az első játékos egy $x \in Sigma$ csúcsba lép, akkor az ellenfél tetszőleges szabályos válaszlépésre van olyan viszontválasza, ami még mindig Σ-ban marad. Ezért ha Σ az első játékos számára egy kvázistratégia és ő ennek megfelelően játszik, akkor garantálható, hogy a $\rho = (a_0, a_1, \dots)$ végeredmény $[\Sigma]$-beli. Ha $[\Sigma] \subset X$ teljesül, akkor tehát az első játékos garantálni tudja hogy a végeredmény X-ben lesz, azaz ő nyer. Ez motiválja az alábbi definíciót.

Definíció. *A $T \subset A^{\mathbb{N}}$ gallyazott fa és $X \subset [T]$ részhalmaz által megadott $G(T, X)$ játékban az első játékos valamely $\Sigma \subset T$ kvázistratégiája nyerő, amennyiben $[\Sigma] \subset X$. A $G(T, X)$ játékot kvázidetermináltnak nevezzük, ha legalább az egyik játékosnak van nyerő kvázistratégiája.*

Nyilvánvaló, hogy minden stratégia egyben kvázistratégia is (pontosabban meghatároz egy kvázistratégiát). Az is világos, hogy amennyiben adott egy nyerő kvázistratégia, és feltesszük a kiválasztási axiómát, akkor konstruálható egy nyerő stratégia. Valóban: minden $s = (a_0, a_1, \dots, a_{2n+1}) \in \Sigma$ játékállás esetén vegyük s-nek a Σ-beli leszármazottjaiból álló H_s halmazt, ez feltételezéseink szerint nemüres minden tekintett s-re. A $\{H_s : (a_0, \ldots, a_{2n+1}) = s \in \Sigma\}$ halmazrendszer egy σ kiválasztási függvénye nyerő stratégiát ad.

Fentebb meggondoltuk, hogy nem lehet mindkét játékosnak egyszerre nyerő stratégiája. Elég gyenge feltevések mellett adódik, hogy nyerő kvázistratégiája sem lehet egyszerre mindkét játékosnak. (A nyerő stratégiák esetében azért nem kellenek extra premisszák, mert már maga a nyerő stratégia létezése is erős feltétel).

Egy ilyen feltevés például a kiválasztási axióma egy gyengítése, az "Axiom of Dependent Choices". Ez az axióma azt mondja, hogy minden ω szinttel rendelkező gallyazott fának van végtelen ága (pontosabban az axiómának egy ennél bonyolultabb formalizációja a standard megfogalmazás, azonban ZF feltevése mellett az ekvivalens az itteni végtelen fás formalizációval). Nem nehéz meggondolni, hogy ez az axióma ekvivalens azzal az állítással, hogy egy végtelen játékban nem lehet egyszerre mindkét játékosnak nyerő kvázistratégiája. Valóban, ha mindkét játékosnak lenne Σ_1 és Σ_2 nyerő kvázistratégiája, akkor összemetszhetnénk ezeket, és a definiáló tulajdonság miatt egy R gallyazott fát kapnánk, amelyre $[R] \subset X$ teljesülne, mert nyerő volt a Σ_1 stratégia az első játékos számára, ám $[R] \subset A^{\mathbb{N}} \setminus X$ is teljesülne, hiszen Σ_2 is nyerő. Ez nyilvánvaló ellentmondás.

6. A determináltsági axióma következményei

Habár a kiválasztási axióma és a determináltsági axióma ellentmondanak egymásnak, különös módon a kiválasztási axióma egy gyengített változata pedig következik a determináltsági axiómából.

1. Tétel. *Feltéve a determináltsági axiómát, teljesül hogy amennyiben $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ valós számok nemüres halmazaiból álló megszámlálható rendszer, úgy van kiválasztási függvénye.*

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi játékot, amelyet az $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ rendszer alapján konstruálunk. A két játékos természetes számokat mond felváltva. Ha az egyik játékos a játék során rendre az $< a_0, a_1, \cdots >$ és $< b_0, b_1, \ldots$ számsorozatokat mondta, úgy nyerjen az második játékos, ha $b \in A_{a_0}$ és nyerjen az első játékos egyébként.

A determináltsági axióma miatt valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája. Ez nem lehet az első játékos, hiszen a_0 megmondása után a második játékos tud jó b-t mondani, mivel A_{a_0} nemüres.

Ezért a második játékosnak van valamilyen σ nyerő stratégiája. Ekkor $f(X_n) = \sigma(\{n\})$ kiválasztási függvény. □

Az alábbiakban néhány állításon keresztül bemutatom azt, hogy a determináltsági axióma feltevése azt implikálja, hogy számos leíró halmazelméleti tulajdonság szokatlanul szépen működik, összevetve a kiválasztási axióma "univerzumával".

2. Tétel. *A valós számok minden részhalmaza Lebesgue-mérhető. (A determináltsági axióma mellett).*

Egy segédállítást bizonyítunk elsőként.

3. Állítás. *(AD) Legyen $S \subset \mathbb{R}$ olyan tulajdonságú, hogy ha $Z \subset S$ Lebesgue-mérhető, akkor nullmértékű. Ekkor S is nullmértékű.*

Bizonyítás. Először is, az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $S \subset [0, 1]$. (Különben S-et felvágjuk egységszakaszokkal és külön-külön bizonyítjuk a nullmértékűséget a szeletekre). Az, hogy S

nullmértékű, egyenértékű azzal, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra teljesül $\overline{\lambda}(S) < \varepsilon$ ahol $\overline{\lambda}$ a Lebesgue külső mérték. Rögzítsünk tehát egy tetszőleges pozitív valós ε értéket, belátjuk hogy $\overline{\lambda}(S) < \varepsilon$, ezzel igazolva a tételt.

Ehhez definiáljuk a(z ε-hoz és S-hez rendelt) **lefedési játékot**. Az első játékos 0 vagy 1 számjegyeket mondhat, a másik játékos természetes számokat: $< a_0, a_1, \cdots >$ és $< b_0, b_1, \cdots >$. A játék interpretációja az alábbi. Legyen $a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$. Továbbá legyen minden $n \in \mathbb{N}$-re a G_k^n halmazrendszer egy felsorolása az következő tulajdonságú G halmazoknak: G véges sok, racionális-racionális végpontú intervallum uniója, és $\lambda(G) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

A játékot az első játékos nyeri, amennyiben:

1. $a \in S$
2. $a \notin \bigcup G_{b_n}^n$

és különben a második játékos nyeri.

Informálisan tehát arról van szó, hogy az első játékos egy $[0, 1]$-beli számot ír fel kettes számrendszerben, melynek S-ben kell lennie. A második játékos eközben próbálja a G_k^n halmazokkal lefedni ezt a számot, az első igyekszik ezt elkerülni.

Állítjuk, hogy az első játékosnak nincs nyerő stratégiája a játékban. Ha lenne ilyen σ nyerő stratégia, akkor képezhetnénk azt az f függvényt, amely egy $< b_0, b_1, \cdots >$ sorozathoz hozzárendeli az $a = f(b)$ számot amelynek $a_0, a_1, \ldots$ jegyeire igaz, hogy $< a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots >$ a játék azon lefolyása, mikor a második játékos a $b_0, b_1, \ldots$ lépéseket teszi, az első játékos pedig σ szerint játszik. Ez az f folytonos, hiszen $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ cilinderhalmazaihoz láthatóan cilinderhalmazok "kilapításait" rendeli, ami $\mathbb{R}$-ben nyílt. Mivel folytonos, azért $f(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ analitikus, így a leíró halmazelméletből tudjuk, hogy mérhető. Másfelől $f(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \subset S$, mert σ nyerő stratégia volt, így a kapott a-k mindig S-beliek lesznek. Azonban S olyan tulajdonságú, hogy minden mérhető része nullmértékű, így $f(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ nullmértékű. Viszont egy nullmértékű halmazt tudunk fedni egy $G_{k_n}^n;\ n = 0, 1, 2, \ldots$ alakú sorozattal – hiszen fedni tudjuk tetszőlegesen kicsi összmértékű intervallumokkal, speciálisan mondjuk $\frac{\varepsilon}{2}$ összmértűkűekkel is, ezeket pedig könnyedén fedni tudjuk sorban $G_{k_n}^n$-beliekkel.

Mivel fedni tudtuk a teljes $f(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$-et egy $G_{k_n}^n$ sorozattal, azért σ nem lehet nyerő stratégia. Itt σ tetszőleges volt, ezért az első játékosnak nem lehet nyerő stratégiája. Feltettük a determináltsági axiómát, így ha az első játékosnak nincs nyerő stratégiája, akkor a másodiknak van. Legyen ez a stratégia τ.

Legyen egy adott $s =< a_0, \ldots, a_n >$ véges $0-1$ sorozatra G_s az a $G_{b_n}^n$ halmaz, ahol $< b_0, \ldots, b_n >$ az a sorozat, amelyet a második játékos lép $< a_0, \ldots, a_n >$-re válaszul a τ stratégia szerint játszva. Mivel τ nyerő stratégia, azért $\forall a \in S$-re $a \in \bigcup\{G_s : s \subset a\}$. Ezért

$$S \subset \bigcup\{G_s : s \in 0, 1^{<\mathbb{N}}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in 0,1^n} G_s$$

Vegyük észre, hogy itt $n \geq 1$ és $s \in 0, 1^n$ esetén $\lambda(G_s) \leq \frac{\varepsilon}{2^{2n}}$ (a G_k^n halmazok definiáló tulajdonságai miatt). Emiatt

$$\lambda(\bigcup_{s \in 0,1^n} G_s) \leq \frac{\varepsilon}{2^{2n}} \cdot 2^n = \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Ezért végül adódik, hogy

$$\lambda(\bigcup_{s\in 0,1^n} G_s) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\bigcup_{s\in 0,1^n} G_s) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

Kaptuk, hogy $\overline{\lambda}(S) < \varepsilon$, de itt ε tetszőleges pozitív szám volt, így adódik, hogy S nullmértékű, ahogy be szerettünk volna látni. □

A segédállítás igazolása után már könnyedén bebizonyíthatjuk a tételt.

Bizonyítás (Tétel). Legyen $X \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. Ehhez létezik A halmaz úgy, hogy $X \subset A$ és $A \setminus X$ minden részhalmaza nullmértékű (véges mértékű X esetén ilyen a legkisebb mértékű mérhető fedőhalmaz, végtelen mértékű X esetén visszavezethetünk a véges mértékű esetre a halmazunk szétvágásával). A bebizonyított segédállításunk szerint ekkor $A \setminus X$ nullmértékű, azaz X mérhető.

További szép leíró halmazelméleti állítások, amelyek teljesülnek a determináltsági axióma feltevése mellett, ám a kiválasztási axiómát feltéve nem:

3. Tétel. *A determináltsági axiómát feltéve:*

- $\mathbb{R}$ *minden részhalmaza Baire-tulajdonságú*
- $\mathbb{R}$ *minden nem megszámlálható részhalmazában van perfekt részhalmaz (zárt és izolált pont nélküli)*

Hivatkozások

[1] T. Jech, *Set Theory*, Springer (1995)

[2] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer (2002).