A Whitehead-probléma

Készítette: Kővári Péter Viktor

Témavezető: Komjáth Péter

2022. tavaszi félév

Kutatómunkám során Paul C. Eklof Whitehead's Problem is Undecidable című cikkét dolgoztam fel. Az igaz, hogy minden szabad csoport Whitehead-csoport, azonban az állítás megfordítása ZFC-től független, erről szól a cikk. Az összefoglalóban csoport alatt mindig Abel-csoportot értek.

1. A Whitehead-csoport

1.1. Definíció. Az A csoportot Whitehead-csoportnak nevezzük, ha tetszőleges $\pi : B \to A$ szürjektív csoporthomomorfizmus, melyre $\ker \pi \simeq \mathbb{Z}$, felhasad, azaz létezik $\rho : A \to B$ csoporthomomorfizmus, melyre $\pi\rho = 1_A$.

1.2. Tétel. Legyen L a Gödel-féle konstruálhatósági axióma. $ZF + V = L$ konzisztens, továbbá $ZF + V = L$-ből következik a kiválasztási axióma és a kontinuumhipotézis.

1.3. Tétel. Legyen MA a Martin-axióma. $ZFC + MA + 2^{\aleph}_0 > \aleph_1$ konzisztens.

Az alábbi két tétel mutatja, hogy $\aleph_1$ számosságú csoport esetén a Whitehead-probléma független ZFC-től:

1.4. Tétel. $ZFC + V = L$ esetén minden $\aleph_1$ számosságú Whitehead-csoport szabad.

1.5. Tétel. $ZFC{+}MA{+}2^{\aleph}_0 > \aleph_1$ esetén létezik $\aleph_1$ számosságú Whitehead-csoport, ami nem szabad.

2. Szabad csoportok és Whitehead-csoportok tulajdonságai

2.1. Tétel. Szabad csoport tetszőleges részcsoportja szabad.

2.2. Tétel. Minden végesen generált torziómentes csoport szabad.

2.3. Tétel. Az A csoport pontosan akkor szabad, ha minden A-ra képező epimorfizmus felhasad.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A szabad és legyen $\pi : B \to A$ epimorfizmus. Legyen $X = \{x_i : i \in I\}$ A bázisa. Minden $i \in I$-hez válasszunk egy $b_i \in B$-t, amelyre $\pi(b_i) = x_i$. Mivel X A bázisa, pontosan egy $\rho : A \to B$ homomorfizmus létezik, melyre $\rho(x_i) = b_i$ minden $i \in I$-re. Nyilván $\pi\rho = 1_A$.
Tegyük fel, hogy minden A-ra képező epimorfizmus felhasad és legyen F az $X = \{x_a : a \in A\}$ bázis által generált szabad csoport. Legyen $\pi : F \to A$ az az egyértelműen meghatározott epimorfizmus, melyre $\pi(x_a) = a$ $(a \in A)$. Legyen $\rho : A \to F$ egy olyan homomorfizmus, amelyre $\pi\rho = 1_A$ (ez a feltétel miatt létezik). ρ injektív, tehát A izomorf F valamely részcsoportjával, ami a 2.1 tétel miatt szabad.

2.4. Tétel. Minden szabad csoport Whitehead-csoport.

Bizonyítás. Az előző tételből következik.

2.5. Tétel. Whitehead-csoport tetszőleges részcsoportja Whitehead-csoport.

2.6. Tétel. Minden Whitehead-csoport torziómentes.

3. Megszámlálható Whitehead-csoportok

3.1. Definíció. A B torziómentes csoport A részcsoportját "tisztának" (pure) nevezzük, ha az A/B faktorcsoport torziómentes.

3.2. Definíció. Legyen B az A csoport egy részcsoportja. Ekkor B'-t, B A-beli "tiszta lezártját" (pure closure) az alábbi módon definiáljuk:

$$B' = \{a \in A : na \in B, \text{ valamely } n \neq 0\text{-ra}\}.$$

B' nyilván A "tiszta" részcsoportja.

3.3. Állítás. Ha A szabad csoport, akkor A minden végesen generált részcsoportját tartalmazza A valamely végesen generált "tiszta" részcsoportja.

Bizonyítás. Legyen B az A csoport egy végesen generált részcsoportja. Látható, hogy B'-nek ugyanakkora a dimenziója, mint B-nek. Mivel B végesen generált, ezért B' is az, továbbá B' "tiszta".

3.4. Tétel. (Pontryagin)
Ha A olyan megszámlálható torziómentes csoport, amelynek minden végesen generált részcsoportját tartalmazza A valamely végesen generált "tiszta" részcsoportja, akkor A szabad.

3.5. Tétel. Minden megszámlálható Whitehead-csoport szabad.

3.6. Definíció. Az A csoportot $\aleph_1$-szabadnak nevezzük, ha minden megszámlálható ($\aleph_1$-nél kisebb számosságú) részcsoportja szabad.

3.7. Tétel. Minden Whitehead-csoport $\aleph_1$-szabad.

Bizonyítás. Legyen A Whitehead-csoport, $B \leq A$ megszámlálható részcsoport. A 2.5 tétel szerint B Whitehead-csoport és mivel megszámlálható, a 3.5 tétel szerint szabad.

4. A Chase-feltétel

4.1. Definíció. Az A $\aleph_1$-szabad csoport egy B részcsoportját "$\aleph_1$-tisztának" ($\aleph_1$-pure) nevezzük, ha az A/B faktorcsoport $\aleph_1$-szabad.

Az alábbi állítást Chase-feltételnek nevezzük:
A egy $\aleph_1$-szabad csoport, aminek minden megszámlálható részcsoportját tartalmazza A egy megszámlalható "$\aleph_1$-tiszta" részcsoportja.

4.2. Definíció. Halmazok

$$A_0 \subseteq ... \subseteq A_\nu \subseteq ..., \ \nu < \alpha$$

növő láncát finomnak nevezzük, ha minden $\lambda < \alpha$ limeszrendszámra $A_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} A_\nu$.

4.3. Lemma. Legyen A $\aleph_1$ rendű csoport. A pontosan akkor elégíti ki a Chase-feltételt, ha előáll megszámlálható sok szabad csoport finom láncának az uniójaként:

$$A_0 \subseteq ... \subseteq A_\nu \subseteq ..., \ \nu < \omega_1,$$

ahol $A_0 = 0$ és tetszőleges $\nu < \omega_1$ számosság esetén $A_{\nu+1}$ "$\aleph_1$-tiszta" A-ban.

4.4. Tétel. Az A csoport pontosan akkor szabad, ha

$$E = \{\lambda < \omega_1 : \lambda \text{ limesz, } A_\lambda \text{ nem "}\aleph_1\text{-tiszta" } A\text{-ban}\}$$

nem stacionárius ω_1-ben.

5. A Gödel-féle konstruálhatósági axióma

5.1. Tétel. Legyen $V = L$. Legyen C a $\{C_\nu : \nu < \omega_1\}$ szigorúan bővülő megszámlálható halmazokból álló finom lánc uniója, továbbá legyen $E \subseteq \omega_1$ stacionárius. Ekkor létezik $\{S_\nu : \nu \in E\}$ úgy, hogy $S_\nu \subseteq C_\nu$ minden $\nu \in E$-re és tetszőleges $X \subseteq C$ esetén $\{\nu \in E : X \cap C_\nu = S_\nu\} \subseteq \omega_1$ stacionárius.

5.2. Következmény. Legyen $V = L$. Legyen B a $\{B_\nu : \nu < \omega_1\}$ szigorúan bővülő megszámlálható halmazokból álló finom lánc uniója, legyen Y tetszőleges megszámlálható halmaz, továbbá legyen $E \subseteq \omega_1$ stacionárius. Ekkor létezik
$\{g_\nu : B_\nu \to B_\nu \times Y : \nu \in E\}$ függvényekből álló halmaz, melyre teljesül, hogy tetszőleges $h : B \to B \times Y$ esetén, amelyre $h(B_\nu) \subseteq B_\nu \times Y$ fennáll minden ν-re, létezik $\nu \in E$, hogy h megszorítva B_ν-re g_ν-vel egyenlő.

5.3. Tétel. Legyen $V = L$. Legyen B a $\{B_\nu : \nu < \omega_1\}$ szigorúan bővülő megszámlálható szabad csoportokból álló finom lánc uniója, melyre
$E = \{\nu < \omega_1 : B_{\nu+1}/B_\nu \text{ nem szabad}\} \subseteq \omega_1$ stacionárius. Ekkor B nem Whitehead-csoport.

Az 1.4 tétel az 5.3 tétel és néhány másik korábbi állítás alapján látható be.

6. A Martin-axióma

6.1. Tétel. Tegyük fel a Martin-axiómát (MA). Legyen A és B is kontinuumnál kisebb számosságú halmaz, továbbá legyen P az alábbi tulajdonságokkal rendelkező függvénycsalád:

1. minden $f \in P$-re f A valamely részhalmazából B-be képező függvény
2. minden $a \in A$-hoz és $f \in P$-hez létezik $g \in P$, amire $f \subseteq g$ és a eleme g értelmezési tartományának
3. P tetszőleges nem megszámlálható P' részéhez létezik $f_1, f_2 \in P'$ és $f_3 \in P$, amire $f_1 \neq f_2$, továbbá f_1-nek és f_2-nek közös kiterjesztése f_3

Ekkor létezik $g : A \to B$ függvény, hogy A tetszőleges véges F részhalmazához létezik $f \in P$, hogy F része f értelmezési tartományának és $g|_F = f|_F$.

6.2. Tétel. Tegyük fel $MA + 2^{\aleph}_0 > \aleph_1$-t. Legyen A $\aleph_1$ rendű csoport, ami eleget tesz a Chase-feltételnek. Ekkor A Whitehead-csoport.

6.3. Tétel. Van olyan $\aleph_1$ rendű A csoport, ami eleget tesz a Chase-feltételnek, de nem szabad.

Az 1.5 tétel a 6.2 és a 6.3 tétel következménye.