# A Whitehead-probléma

Készítette: Kővári Péter Viktor

Témavezető: Komjáth Péter

2022. tavaszi félév

# A Whitehead-csoport

### Definíció

Az $A$ csoportot Whitehead-csoportnak nevezzük, ha tetszőleges $\pi : B \to A$ szürjektív csoporthomomorfizmus, melyre $\ker \pi \simeq \mathbb{Z}$, felhasad, azaz létezik $\rho : A \to B$ csoporthomomorfizmus, melyre $\pi\rho = 1_A$.

# A Whitehead-csoport

## Tétel

Legyen $L$ a Gödel-féle konstruálhatósági axióma. $ZF + V = L$ konzisztens, továbbá $ZF + V = L$-ből következik a kiválasztási axióma és a kontinuumhipotézis.

## Tétel

$ZFC + V = L$ esetén minden $\aleph_1$ számosságú Whitehead-csoport szabad.

# A Whitehead-csoport

**Tétel**

Legyen $MA$ a Martin-axióma. $ZFC + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ konzisztens.

**Tétel**

$ZFC + MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$ esetén létezik $\aleph_1$ számosságú Whitehead-csoport, ami nem szabad.

# Szabad csoportok és Whitehead-csoportok tulajdonságai

**Tétel**

Szabad csoport tetszőleges részcsoportja szabad.

**Tétel**

Minden végesen generált torziómentes csoport szabad.

**Tétel**

Az $A$ csoport pontosan akkor szabad, ha minden $A$-ra képező epimorfizmus felhasad.

# Szabad csoportok és Whitehead-csoportok tulajdonságai

## Tétel

Az $A$ csoport pontosan akkor szabad, ha minden $A$-ra képező epimorfizmus felhasad.

## Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $A$ szabad és legyen $\pi : B \to A$ epimorfizmus. Legyen $X = \{x_i : i \in I\}$ $A$ bázisa. Minden $i \in I$-hez válasszunk egy $b_i \in B$-t, amelyre $\pi(b_i) = x_i$. Mivel $X$ $A$ bázisa, pontosan egy $\rho : A \to B$ homomorfizmus létezik, melyre $\rho(x_i) = b_i$ minden $i \in I$-re. Nyilván $\pi\rho = 1_A$.

# Szabad csoportok és Whitehead-csoportok tulajdonságai

## Tétel

Az $A$ csoport pontosan akkor szabad, ha minden $A$-ra képező epimorfizmus felhasad.

## Bizonyítás

Tegyük fel, hogy minden $A$-ra képező epimorfizmus felhasad és legyen $F$ az $X = \{x_a : a \in A\}$ bázis által generált szabad csoport. Legyen $\pi : F \to A$ az az egyértelműen meghatározott epimorfizmus, melyre $\pi(x_a) = a$ $(a \in A)$. Legyen $\rho : A \to F$ egy olyan homomorfizmus, amelyre $\pi\rho = 1_A$ (ez a feltétel miatt létezik). $\rho$ injektív, tehát $A$ izomorf $F$ valamely részcsoportjával, ami szabad.

# Szabad csoportok és Whitehead-csoportok tulajdonságai

**Tétel**

Minden szabad csoport Whitehead-csoport.

**Tétel**

Whitehead-csoport tetszőleges részcsoportja Whitehead-csoport.

**Tétel**

Minden Whitehead-csoport torziómentes.

# Megszámlálható Whitehead-csoportok

## Definíció

A $B$ torziómentes csoport $A$ részcsoportját "tisztának" (pure) nevezzük, ha az $A/B$ faktorcsoport torziómentes.

## Definíció

Legyen $B$ az $A$ csoport egy részcsoportja. Ekkor $B'$-t, $B$ $A$-beli "tiszta lezártját" (pure closure) az alábbi módon definiáljuk:

$$B' = \{a \in A : na \in B, \text{ valamely } n \neq 0\text{-ra}\}.$$

$B'$ nyilván $A$ "tiszta" részcsoportja.

# Megszámlálható Whitehead-csoportok

## Állítás

Ha $A$ szabad csoport, akkor $A$ minden végesen generált részcsoportját tartalmazza $A$ valamely végesen generált "tiszta" részcsoportja.

## Tétel

(Pontryagin)

Ha $A$ olyan megszámlálható torziómentes csoport, amelynek minden végesen generált részcsoportját tartalmazza $A$ valamely végesen generált "tiszta" részcsoportja, akkor $A$ szabad.

# Megszámlálható Whitehead-csoportok

## Tétel

Minden megszámlálható Whitehead-csoport szabad.

## Definíció

Az $A$ csoportot $\aleph_1$-szabadnak nevezzük, ha minden megszámlálható ($\aleph_1$-nél kisebb számosságú) részcsoportja szabad.

## Tétel

Minden Whitehead-csoport $\aleph_1$-szabad.

# A Chase-feltétel

**Definíció**

Az $A$ $\aleph_1$-szabad csoport egy $B$ részcsoportját "$\aleph_1$-tisztának" ($\aleph_1$-pure) nevezzük, ha az $A/B$ faktorcsoport $\aleph_1$-szabad.

Az alábbi állítást Chase-feltételnek nevezzük:

$A$ egy $\aleph_1$-szabad csoport, aminek minden megszámlálható részcsoportját tartalmazza $A$ egy megszámlalható "$\aleph_1$-tiszta" részcsoportja.

# A Chase-feltétel

## Definíció

Halmazok

$$A_0 \subseteq \ldots \subseteq A_\nu \subseteq \ldots, \; \nu < \alpha$$

növő láncát finomnak nevezzük, ha minden $\lambda < \alpha$ limeszrendszámra

$A_\lambda = \bigcup_{\nu<\lambda} A_\nu$.

# A Chase-feltétel

**Lemma**

Legyen $A$ $\aleph_1$ rendű csoport. A pontosan akkor elégíti ki a Chase-feltételt, ha előáll megszámlálható sok szabad csoport finom láncának az uniójaként:

$$A_0 \subseteq \ldots \subseteq A_\nu \subseteq \ldots, \ \nu < \omega_1,$$

ahol $A_0 = 0$ és tetszőleges $\nu < \omega_1$ számosság esetén $A_{\nu+1}$ "$\aleph_1$-tiszta" $A$-ban.

# A Chase-feltétel

## Tétel

Az $A$ csoport pontosan akkor szabad, ha

$$E = \{\lambda < \omega_1 : \lambda \text{ limesz, } A_\lambda \text{ nem "}\aleph_1\text{-tiszta" } A\text{-ban}\}$$

nem stacionárius $\omega_1$-ben.

# A Gödel-féle konstruálhatósági axióma

**Tétel**

Legyen $V = L$. Legyen $C$ a $\{C_\nu : \nu < \omega_1\}$ szigorúan bővülő megszámlálható halmazokból álló finom lánc uniója, továbbá legyen $E \subseteq \omega_1$ stacionárius. Ekkor létezik $\{S_\nu : \nu \in E\}$ úgy, hogy $S_\nu \subseteq C_\nu$ minden $\nu \in E$-re és tetszőleges $X \subseteq C$ esetén $\{\nu \in E : X \cap C_\nu = S_\nu\} \subseteq \omega_1$ stacionárius.

# A Gödel-féle konstruálhatósági axióma

## Következmény

Legyen $V = L$. Legyen $B$ a $\{B_\nu : \nu < \omega_1\}$ szigorúan bővülő megszámlálható halmazokból álló finom lánc uniója, legyen $Y$ tetszőleges megszámlálható halmaz, továbbá legyen $E \subseteq \omega_1$ stacionárius. Ekkor létezik $\{g_\nu : B_\nu \to B_\nu \times Y : \nu \in E\}$ függvényekből álló halmaz, melyre teljesül, hogy tetszőleges $h : B \to B \times Y$ esetén, amelyre $h(B_\nu) \subseteq B_\nu \times Y$ fennáll minden $\nu$-re, létezik $\nu \in E$, hogy $h$ megszorítva $B_\nu$-re $g_\nu$-vel egyenlő.

# A Gödel-féle konstruálhatósági axióma

**Tétel**

Legyen $V = L$. Legyen $B$ a $\{B_\nu : \nu < \omega_1\}$ szigorúan bővülő megszámlálható szabad csoportokból álló finom lánc uniója, melyre $E = \{\nu < \omega_1 : B_{\nu+1}/B_\nu \text{ nem szabad}\} \subseteq \omega_1$ stacionárius. Ekkor $B$ nem Whitehead-csoport.

# A Martin-axióma

## Tétel

Tegyük fel $MA + 2^{\aleph_0} > \aleph_1$-t. Legyen $A$ $\aleph_1$ rendű csoport, ami eleget tesz a Chase-feltételnek. Ekkor $A$ Whitehead-csoport.

## Tétel

Van olyan $\aleph_1$ rendű $A$ csoport, ami eleget tesz a Chase-feltételnek, de nem szabad.

Köszönöm a figyelmet!