

Egyéni kutatómunka 2 beszámoló

1. Bevezetés

A félév során folytattam az Egyéni kutatómunka 1 tárgy kereteiben végzett munkát [1], ami végén két lehetséges folytatási irányt állapítottam meg. Ezek közül a második felé fordultam: a magasabb homológiákon indukált leképezések vizsgálatához. Februárban a következő kutatási célt fogalmaztam meg: "Az előző félévi egyéni kutatómunkát tovább folytatva vizsgálok perkolációs modelleket. A félévben a cél a magasabb dimenziós viselkedés jobb megértése szimulációkkal, alacsony dimenziós eszközök általánosítási lehetőségének vizsgálatával, esetleg új módszerek megtalálásával." Úgy gondolom, hogy ezen tervet a lehetőségekhez mérten teljesítettem, a téma kapcsán végzett tevékenységem alább ismertetem.

A tóruszon végzett plakett perkolációt vizsgáltam, a következő definíció szerint:

1.1. Definíció ([2] 5. oldal tetejéhez hasonló). Legyenek pozitív i, d, N egészek ($0 < i < d$), valamint \mathbb{T}_N^d a d -dimenziós N oldalhosszú tórusz egységkockákká való felbontásából adódó CW-felbontással. Tetszőleges $0 \leq p \leq 1$ -re legyen $P_p = P(i, d, N, p)$ az a véletlen halmaz (CW-komplexus), hogy minden i -cellát veszünk egymástól függetlenül p valószínűséggel, valamint a kiválasztott cellák határán levő összes alacsonyabb dimenziósat. Legyen $\phi_p : P_p \hookrightarrow \mathbb{T}_N^d$ a beágyazás, $\phi_{p_*} : H_i(P_p; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_i(\mathbb{T}_N^d; \mathbb{Z}_2)$ pedig a \mathbb{Z}_2 feletti i -homológián indukált leképezés.

Két kérdés volt fókuszban: mit mondhatunk arról, hogy ϕ_{p_*} mikor lesz nemtriviális, illetve mikor szürjektív.

Észrevehetjük, hogy a definícióban a "veszünk (...) p valószínűséggel" helyett azt is mondhatjuk, hogy minden cellára ráírunk egy $[0, 1]$ -ből egyenletesen, függetlenül választott számot, és azokat vesszük, melyeken legfeljebb p szerepel. Ha rögzítünk egy ilyen címkézést, akkor ez alapján megadható CW-komplexusok egy filtrálása: ez éppen P_p lesz, ahogy $p \in [0, 1]$ -en fut. Ebből csak azok a szintek érdekelnek, melyek valamely címke értékének felelnek meg. A továbbiakban erről tesztek megállapításokat.

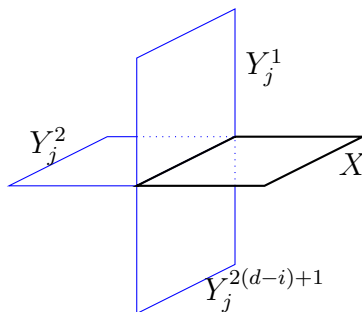
Ahhoz, hogy valamiféle előzetes kép legyen arról, hogyan viselkedik a fenti objektum, programot írtam, ami kiszámolja néhány tulajdonságát. E közben felmerült néhány egyszerűsítési lehetőség, melyek lehetséges, hogy elméleti haszonnal is bírnak.

2. Filtrálás módosítása

Észre lehet venni, hogy a vizsgált ϕ_* csak a P_p -beli ciklusoktól függ. Azokat a cellákat, amik nyilvánvaló módon nem lehetnek részei ciklusnak, azaz valamely egyel kisebb dimenziós cellára egyedül illeszkednek, letörölhetjük. Ezt a letörlést megvalósíthatjuk úgy, hogy

módosítjuk a megjelenés idejét: későbbre tesszük. De hogyan ismerhetjük fel, hogy mikor kell módosítani ezt, illetve mire.

Legyen X egy i -dimenziós cella, P_1, \dots, P_{2i} a peremén levő $i - 1$ -dimenziós cellák, továbbá $Y_1^1, Y_1^2, \dots, Y_1^{2(d-i)+1}, Y_2^1, \dots, Y_{2i}^{2(d-i)+1}$ a P_j -kre illeszkedő i -dimenziós cellák X -et leszámítva (az 1. ábra szerint).

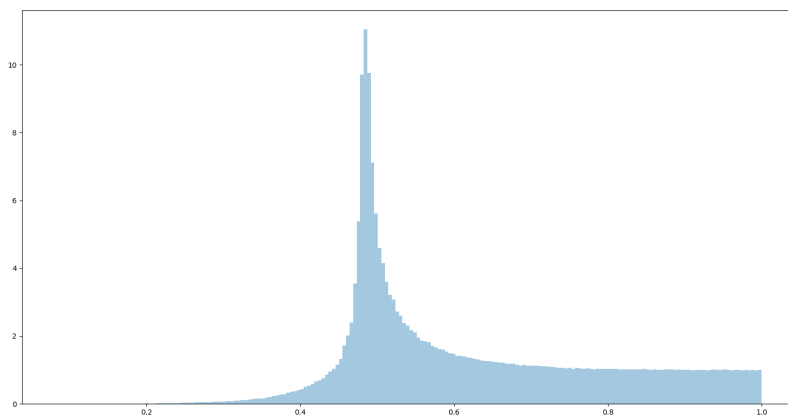


1. ábra. Az X melletti néhány i -dimenziós cella.

Ha $p(C)$ jelöli azt, hogy a C i -dimenziós cellára milyen számot írtunk, akkor a fenti feltétel teljesüléséhez X -en a

$$\max\{p(X), \max_{j=1}^{2i} \min_{k=1}^{2(d-i)+1} p(Y_j^k)\}$$

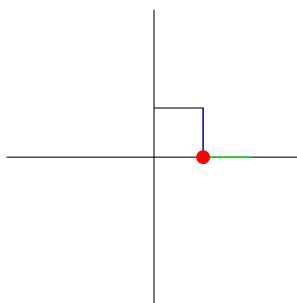
címkének kell szerepelnie. Ha nem ez van, módosítsuk ezzé. Ezt a módosító lépést végezzük addig, hogy mindenhol teljesüljön az azonosság. A végeredmény megad egy P -hez hasonló Q filtrálást. Általában a cellák bekerülési ideje megváltozik (sőt gyakran még a sorrendjük is módosul), de ϕ_* ugyanaz marad. A 2. ábrán a Q -hoz tartozó címkék eloszlásának közelítése látható.



2. ábra. A módosítás után a Q -hoz tartozó eloszlás $(2, 4, 15)$ paraméter értékek mellett.

A kezdeti eloszlás egyenletes volt. Látszódik, hogy ez jelentősen eltér attól, továbbá már a függetlenség sem teljesül.

A fent leírt módszerrel tehát az olyan lapokat elimináltuk, amik nyilvánvalóan nem szerepelhetnek ciklusban. \mathbb{Z}_2 felett dolgozunk, így egy másik dolog, ami ciklusban nem fordulhat elő, hogy egy $i-1$ -dimenziós cellára páratlan sok i dimenziós illeszkedjen. Ha az ilyen jellegű redukciókat is elvégezzük, esetszétválasztásokhoz jutunk, melyekből az első típusú redukciót újból elvégezve a beágyazás által a homológiákon indukált leképezés már nem marad azonos. Erre egy példa a 3. ábrán látható. Még egy egyszerűsítési lehetőség lenne valamely (homologikus) határok letörlése, de ezeknél is lehetnek problémák abból adódóan, hogy eredetileg nem ciklusból indultunk ki.



3. ábra. Ha a kék szakaszt töröljük le, akkor a képen két generátor kapunk meg, ha a zöldet, akkor csak egyet.

3. Visszavezetés 1-dimenzióra

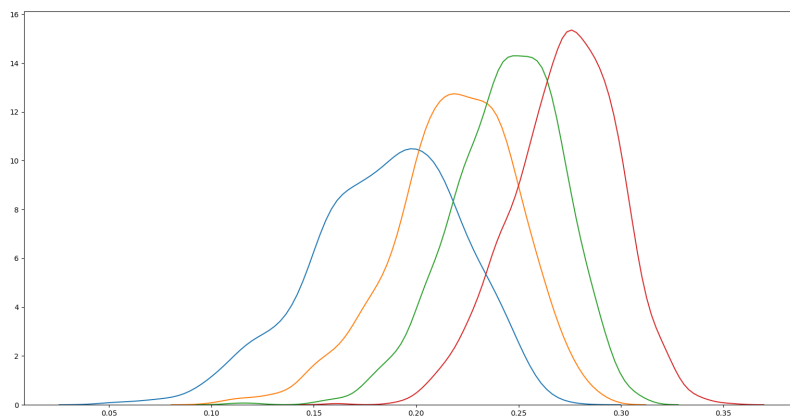
Az előző fejezetben tárgyalt módosítással sok lapra írt számot módosítottunk, így még több 1-cellának a bekerülési idejét toltuk feljebb, továbbá a nyilvánvalóan nem i -ciklusokra illeszkedő hurkokat megszüntettük. Ezzel felmerülhet a kérdés, hogy ha a $H_1(Q_q; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(\mathbb{T}_N^d; \mathbb{Z}_2)$ (a beágyazás által indukált) leképezést vizsgáljuk, az milyen kapcsolatban van ϕ_{q*} -gal. Ehhez gondoljuk meg, mik tudnak az egyes csoportokban nemtriviális elemeket reprezentálni.

\mathbb{T}^d -ben a nemtriviális H_i -elemeket olyan 'lapos' ciklusok reprezentálják, melyek i különböző irányban "körbeérnek". Ezeken tehát megtalálható i különböző irányú nemtriviális H_1 -beli elem reprezentánsa.

A vissza irány nem ennyire egyszerű: lehetséges, hogy a különböző irányú H_1 reprezentánsokra "csövek" vannak ragasztva. Az összefüggőség feltevése sem elég: ha ezeket a csöveket másik csövek kötik össze, még mindig nem kapunk nemtriviális H_i -elem reprezentánst. Ennek ellenére lehetséges, hogy Q úgy fejlődik, hogy az előbb vázolt jelenséghez tartozó paraméter-tartomány kicsi, sőt akár aszimptotikusan el is tűnik. Ezt az ötletemet próbáltam letesztelni egy szimulációval, hogy igaz lehet-e. Ami esetet megvizsgáltam, abból az derül ki, hogy nem.

Jelenleg csak speciális esetekben ismert, hogyan viselkedik ϕ_{p*} , így egy olyan paraméterezést

választottam, amikor ismert a válasz: ha $i = d/2$, akkor a nemtriviális elemek megjelenéséhez, valamint a szürjektiváshoz tartozó kritikus valószínűség $1/2$ ([2]). Így a vizsgálatom a $(2, 4, 15)$ -tel paraméterezett perkolációra vonatkozott, 1406 teret generáltam, és végeztem el rajta (számítógép segítségével) a számolásokat.



4. ábra. $(2, 4, 15)$ paraméter mellett a különböző irányú standard H_1 -generátorok megjelenésének eloszlása.

A 4. és a 2. ábrákat összevetve látható, hogy a H_1 -en indukált leképezés szürjektivitása már akkor bekövetkezik, amikor még kevés 2-lap van a térben. Számszerűsítve: a kisorsolt esetek több, mint 99%-ában $q = 0.33$ -nál már H_1 -en szürjektivitást indukál a beágyazás, míg ekkorra a 2-lapok kevesebb, mint 6 ezreléke jelent meg.

Ezen kívül megvizsgáltam, hogy lehet-e mondani valamit a különböző irányok megjelenési valószínűségei közti kapcsolatról. Függetlenek lennének? Lenne köztük valamiféle korreláció? A különböző irány-párokhoz tartozó tapasztalati korrelációs együtthatókat a következő

mátrix tartalmazza:
$$\begin{pmatrix} 1 & .0432 & .0448 & .0427 \\ .0432 & 1 & .0226 & .0501 \\ .0448 & .0226 & 1 & .0472 \\ .0427 & .0501 & .0472 & 1 \end{pmatrix}$$
. Azaz a különböző irányú generátorok megjelenési ideje közt kis pozitív korreláció van.

4. Továbbhaladási irányok

A félévben több kérdés, irány is felmerült. Ezek közül leírok néhányat, melyekben érdemes lehet továbbhaladni.

- A 2. fejezetben felvázolt módszerrel megkapott véletlen tér hogyan viselkedik? Különösképpen a cellatávolság és a megjelenések közti korreláció szempontjából.

- A 2. ábrán nagyjából $1/2$ -nél látható egy túske. Más paramétereknél is előáll ilyen? Ha igen, van-e kapcsolat közte és a nemtriviális homológia-elemek megjelenése közt.
- Hogyan állhatnak egymáshoz képest a megjelenő csövek? Hogyan jelennek meg köztük hárták? A rögzített peremű hárták leszámolásával lehet adni valamiféle becslést a megjelenési értékekre?

Hivatkozások

- [1] Sz. L. Egyéni kutatómunka 1 beszámoló <https://web.cs.elte.hu/agoston/bboard/egyeni-kutatomunka/EK-2021osz/Szemeredi-Levente-2021o-Beszamolo.pdf>
- [2] Paul Duncan, Matthew Kahle, and Benjamin Schweinhart. n.d. “Homological Percolation on a Torus,” 34.