Egy önhasonló halmazcsalád közös pontjai és gauge-függvények

Imolay András

2022. május 12.

Kivonat

A kutatásom kiindulópontja az "On a class of self-similar sets which contain finitely many common points" című cikk [6]. A cikkben egy paraméteres önhasonló halmazcsalád esetén tetszőleges x pontra tekintik azon paraméterek halmazát, amik esetén az x pont beleesik a halmazba. Bizonyítják, hogy tetszőleges pontra ezen halmaz Lebesgue-nullmértékű és teljes Hausdorff-dimenziójú. Ezt az eredményt próbáltam élesíteni annak a kérdésnek a megválaszolásával, hogy létezik-e olyan gauge-függvény, melyre a hozzárendelt Hausdorff-mérték szerint a vizsgált halmaz pozitív, véges mértékű.

1. Bevezetés

Múlt félévben Zólomy Kristóffal közösen kutattunk, és feldolgoztuk az "On a class of self-similar sets which contain finitely many common points" című cikket [6], amihez meg kellett értenünk a témakör alapvető definícióit, tételeit. Ez felemésztette az időnk nagy részét, így lényegében nem maradt arra idő, hogy a témakörben megoldatlan problémákkal foglalkozzunk. Ebben a félévben a múlt félévi kutatást folytattam (immár egyedül), és az volt a célkitűzésem, hogy amellett, hogy még jobban, mélyebben beletanulok a témába, megpróbálok valamin gondolkodni, saját eredményeket kihozni.

Az előző félév végén tartott előadásunk után Elekes Márton kérdezte meg a mostani kutatásom fő kérdését, amit utána a témavezetőm is érdekes kérdésnek talált, így ezt tűztem ki fő célnak erre a félévre, hogy utánaolvassak ezzel kapcsolatos eredményeknek, és megpróbáljam megoldani ezt a problémát. A kérdést a következő részben mondom ki, a szükséges definíciók bevezetése után.

Sajnos végül nem sikerült megoldanom. Többször azt éreztem, hogy nagyon közel állok hozzá, de végül egyik ötletem sem bizonyult elegendőnek. Ennek ellenére hasznosnak érzem ezt a kutatást, véleményem szerint sokat fejlődtem belőle mind szakmailag, mind kutatási szempontból, azaz sokat gondolkodtam egy nehéz kérdésen, és kapcsolódó cikkeket kerestem, értettem meg.

A kutatásom során lényegében két dolgot csináltam felváltva. Egyrészt, kapcsolódó cikkeket kerestem az interneten és átolvastam őket. Ebben a félévben, az előzővel ellentétben, nem az volt a célom, hogy ezeket a cikkeket nagyon alaposan feldolgozzam, hanem inkább az, hogy megtaláljam és megértsem az olyan eredményeket, amik hasznosak lehetnek a saját problémémhoz. Másrészt a problémán gondolkodtam, próbáltam saját ötletekkel előállni, illetve próbáltam a cikkekben talált eredményeket alkalmazni. Mindezekről alaposabban írok a későbbi fejezetekben.

2. Alapok

A múlt féléves beszámolónkban definiáltuk a témakör alapvető fogalmait, tételeit, többek között leírtuk, hogy mit nevezünk önhasonló halmaznak, és mi az a Hausdorff-dimenzió. Emellett a [6] cikk fő eredményeit is vázoltuk. Emiatt ezekbe most nem megyek bele újra, csak azokat a dolgokat emelem ki a cikkből, amik fontosak lesznek számomra, illetve csak olyan dolgokat definiálok, amiket ebben a félévben tanultam a kutatásaim során.

A kérdésem kimondásához szükség van egy definícióra, illetve a [6] cikkben definiált halmazcsaládra.

2.1. Definíció. Legyen $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ egy monoton növő, jobbról folytonos, függvény, melyre $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$. Legyen

$$H^h_\varepsilon(K) = \inf\left\{\sum_i h(|U_i|) \ : \ K \subset \bigcup_i U_i\right\},$$

ahol $K \subset \mathbb{R}$ tetszőleges részhalmaz, az infimum az összes megszámlálható fedésen fut végig, amelyben minden U_i átmérője legfeljebb ε, és $|U|$ az U halmaz átmérőjét jelöli. Legyen továbbá $H^h = \lim_{\varepsilon\to 0} H^h_\varepsilon$. Ekkor bizonyítható, hogy H^h egy Borel-mérték. Az ilyen típusú mértékeket a h gauge-függvényhez rendelt Hausdorff-mértékeknek nevezzük.

Erről a definícióról Rogers könyvében [5] olvastam el az alapokat, ahol precízen definiálja a Hausdorff-mértékeket, és bizonyítja a vele kapcsolatos alapvető állításokat. Világos, hogy ha a $h(x) = x^t$ alakú függvényeket vizsgáljuk, akkor éppen a szokásos Hausdorff-mértékekekhez jutunk, amikből a Hausdorff-dimenziót származtatjuk.

Továbbá definiálom a kiinduló cikkben [6] szereplő halmazt, amit vizsgálok.

2.2. Definíció. Legyen $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$ esetén K_λ az $\{f_{\lambda,0}(x) = \lambda x, f_{\lambda,1}(x) = \lambda x + 1 - \lambda\}$ IFS által generált halmaz, azaz az egyetlen K_λ kompakt halmaz, melyre

$$K_\lambda = f_{\lambda,0}(K_\lambda) \cup f_{\lambda,1}(K_\lambda).$$

Ekkor legyen $\Lambda(x) = \{\lambda \in (0, \frac{1}{2}) \ : \ x \in K_\lambda\}$.

A [6] cikkben is ezt a halmazt vizsgálják, belátták, hogy ez egy Cantor-halmaz minden $x \in (0, \frac{1}{2})$ esetén, továbbá a $\Lambda(x)$ halmaz Lebesgue-mértéke 0, míg a Hausdorff-dimenziója 1. Ez valahogy pont azt jelenti, hogy a Hausdorff-dimenzió nem fogja meg elég pontosan a halmaz méretét, mivel 1 a dimenzió, de az 1-dimenzióhoz tartozó Hausdorff-mérték, ami éppen a Lebesgue-mérték az 0. Tehát minden $t < 1$ esetén a t-dimenziós Hausdorff-mérték végtelen, míg minden $t \geq 1$ esetén 0. Ez insprálta a kutatásom fő kérdését:

2.3. Kérdés. Létezik-e valamelyik (vagy minden) $x \in (0, \frac{1}{2})$ esetén olyan g_x gauge-függvény, melyre $0 < H^{g_x}(\Lambda(x)) < \infty$?

3. Cikkek és bizonyítási ötletek

Ebben a fejezetben összefoglalom, hogy milyen módokon próbáltam megtámadni a problémát.

3.1. Az eredeti cikk bizonyításának általánosítása

A legtermészetesebb ötlet, hogy a [6] cikkben használt bizonyítást, miszerint 0 a Lebesgue-mérték és 1 a Hausdorff-dimenzió, megpróbáljam általánosítani, hátha kis módosítással több is kijön a bizonyításukból. Ennek az áttekintéséhez először összefoglalom a cikkük fő eredményeit:

3.1. Tétel. *Tetszőleges $\lambda \in \Lambda(x)$ esetén*

$$\lim_{\delta \to 0} \dim_H(\Lambda(x) \cap (\lambda - \delta, \lambda + \delta)) = \dim_H(K_\lambda) = \frac{\log(2)}{-\log(\lambda)},$$

ahol $\dim_H$ *a Hausdorff-dimenziót jelöli.*

Az utóbbi egyenlőség, azaz $\dim_H(K_\lambda) = \frac{\log(2)}{-\log(\lambda)}$ ismert, abból következik, hogy K_λ egy önhasonló halmaz.

A tétel lényegi részének bizonyítási ötlete az, hogy $\Lambda(x)$ egy megfelelő részhalmaza és K_λ egy részhalmaza között oda és vissza is mutatnak egy Lipschitz-leképzést, ami ismert, hogy nem növeli a Hausdorff-dimenziót. Valójában ennél azért kicsit bonyolultabb, de ilyesmin múlik, ezt múlt félévben leírtuk, így most nem megyek bele a részletekbe. Ezt a bizonyítási ötletet nem sikerült általánosítanom, mert általános gauge-függvények esetén nem működnek szépen a Lipschitz-leképzések. Viszont ennek egyszerű következménye (a [6] cikkben szintén ki van mondva) a következő:

3.2. Következmény. *Legyen $x \in (0, \frac{1}{2})$. Ekkor tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum esetén, melyre $\Lambda(x) \cap I \neq \emptyset$ teljesül, hogy*

$$\dim_H(\Lambda(x) \cap I) = \sup_{\lambda \in \Lambda(x) \cap I} \dim_H K_\lambda.$$

Ez alapján már könnyű bebizonyítani a cikk fő tételét, amit most vázlatosan le is írok, mivel rövid és ezt próbálom majd továbbgondolni.

3.3. Tétel. $\dim_H(\Lambda(x)) = 1$ *és* $\lambda(\Lambda(x)) = 0$*, ahol λ itt a Lebesgue-mértéket jelöli.*

Bizonyítás. Egyszerű látni, hogy $\min(\Lambda(x)) = x$ és $\max(\Lambda(x)) = \frac{1}{2}$, így az előző következmény szerint

$$\dim_H(\Lambda(x)) = \dim_H \left(\Lambda(x) \cap (x, 1/2)\right) = \sup_{\lambda \in \Lambda(x) \cap (x, \frac{1}{2})} \dim_H K_\lambda = 1,$$

mivel ahogy $\lambda \to \frac{1}{2}$ úgy a $\dim_H K_\lambda$ tart 1-hez, és könnyű meggondolni, hogy tudunk $\Lambda(x) \cap (x, \frac{1}{2})$ halmazbeli pontokkal $\frac{1}{2}$-hez konvergálni.

Azonban minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\Lambda_n(x) = \Lambda(x) \cap [x, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$ halmaz Hausdorff-dimenziója legfeljebb $\frac{\log 2}{-\log(1/2 - 1/n)} < 1$, így az összes ilyen alakú halmaz Hausdorff-dimenziója szigorúan kisebb, mint 1. Ám ekkor a Lebesgue-mértékük 0, így

$$\Lambda(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n(x)$$

Lebesgue-mértéke is 0. $\square$

Ez alapján az a sejtésem, hogy semmilyen gauge-függvényre nem lesz pozitív és véges a $\Lambda(x)$ halmaz Hausdorff-mértéke. Ugyanis tegyük fel, hogy létezik egy ilyen g gauge-függvény. Ekkor nem lehet minden n-re $H^g(\Lambda_n(x)) = 0$, mert akkor az uniójuk mértéke is 0 lenne, így valamilyen N számra $H^g(\Lambda_N(x)) > 0$, legyen $\dim_H(\Lambda_N(x)) = c < 1$. Tehát egy 1-nél kisebb Hausdorff-dimenziójú halmaz H^g-mértéke pozitív, azonban a $\Lambda(x) - \Lambda_N(x)$ egy teljes (azaz 1) Hausdorff-dimenziójú halmaz, de a H^g-mértékének végesnek kell lennie. Ez nem tűnik igaznak, ezek alapján sejtem azt, hogy nem lesz megfelelő gauge-függvény.

Legyen $c < s < t < 1$, és jelölje H^l a szokásos, l-dimenziós Hausdorff-mértéket, amennyiben l egy valós szám, azaz az x^l függvényhez rendelt Hausdorff-mértéket. Ekkor $\dim_H(\Lambda_N(x)) = c$ miatt $H^s(\Lambda_N(x)) = 0$, azaz H^g szerint nagyobb a mértéke, mint H^s szerint, ami azt biztosan jelenti, hogy létezik egy $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sorozat, ami pozitív valósakból áll és 0-hoz tart, továbbá $g(a_i) > a_i^s$. Ehhez hasonlóan $\dim_H \Lambda(x) = 1$ miatt $H^t(\Lambda(x)) = \infty$, míg $H^g(\Lambda(x)) < \infty$, így kell léteznie egy olyan $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pozitívakból álló, 0-hoz tartó sorozatnak, melyre $g(b_i) < b_i^t$. Ez minden $c < s < t < 1$ számokra igaz, így ha van megfelelő g függvény akkor annak az x^l hatványfüggvényekhet képest "oszcillálnia" kell, azaz végtelen sokszor megy x^s fölé, és végtelen sokszor megy x^t alá ahogy tartunk 0-hoz.

Ilyen függvényt azonban még könnyű gyártani. De kijött az az érdekes eredmény, hogy nincs olyan g gauge-függvény, melyre minden $s < 1$ esetén létezik $\varepsilon > 0$, hogy a $(0, \varepsilon)$ intervallumban $x < g(x) < x^s$. Nevezzük az ilyen gauge-függvényeket szépnek. Ezt azért emelem ki, mert általában amikor a matematikusok ilyen típusú, 1 Hausdorff-dimenziójú és 0 Lebesgue-mértékű halmazokhoz gauge-függvényeket keresnek, akkor ez érdekli őket, hogy be lehet-e szúrni valamit az x és x^s közé minden $s < 1$ esetén, azaz létezik-e megfelelő szép függvény, mivel az mond el valamit a halmaz méretéről bizonyos szempontból. A mi esetünkben nem lehet ilyen módon finomítani, csak nem szép függvények jöhetnek szóba. Az is látható a fentiekből, hogy az összes szép gauge-függvény esetén 0 lesz a $\Lambda(x)$ halmaz Hausdorff-mértéke.

Valamennyit lehet finomítani azon, hogy milyen típusú függvényeket vizsgálunk. Az volt a tervem, hogy belátom, hogy ha van megfelelő gauge-függvény, akkor kell lennie egy szűkebb osztályból is gauge-függvénynek, és belátom, hogy olyan már nem lehet. Ez végül nem sikerült, de leírom az ötleteim.

Világos, hogy nagyon fura g függvények esetén bizonyos átmérőjű halmazokat nem éri meg használni. Például ha $g(1) = 1$ és $g(1/3) = \frac{1}{5}$, akkor 1-hosszú intervallumot jobban megéri 4 darab $\frac{1}{3}$-hosszú intervallummal lefedni, így ilyenkor feltehetjük, hogy nem használunk 1 hosszú intervallumot. Ennek fényében tetszőleges $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény esetén definiálok egy $h^* : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$h^*(p) = \min(h(p), \inf_{n,q}\{n \cdot h(q) \ : \ n \in \mathbb{N}, \ q \in \mathbb{R}^+, \ nq > p\}).$$

Azt állítom, hogy a H^h mérték megegyezik a H^{h^*} mértékkel. Ugyanis egyrészt, világos, hogy tetszőleges A halmazra $H^{h^*}(A) \leq H^h(A)$, mivel a definícióból látható, hogy $h^*(x) \leq h(x)$ minden x esetén. Megfordítva, tekintsünk egy U_i fedését A-nak, amire nézve a $\sum h^*(|U_i|)$ kevesebb, mint ε-nal tér el $H^{h^*}(A)$-tól. Ekkor tetszőleges U_i-ról feltehetjük, hogy intervallum, csináljunk egy másik fedést, ami H^h-t közelíti. Ha $h(|U_i|) = h^*(|U_i|)$ akkor ebbe a fedésbe is vegyük bele U_i-t, ha pedig nem, akkor definíció szerint van olyan q, n, hogy $nq > |U_i|$ és $nh(q)$ legfeljebb $\frac{\varepsilon}{2^i}$-nel nagyobb, mint $h^*(|U_i|)$, így U_i helyett vegyünk n darab q átmérőjű intervallumot, amik fedik U_i-t. Legyen az így kapott intervallumsorozat U_i'. Ez tehát világos, hogy A-nak egy fedése, és a definíció szerint legfeljebb 2ε-nal nagyobb értéket ad $\sum h(|U_i'|)$, mint $H^{h^*}(A)$, így ε-nal 0-ba tartva megkapjuk, hogy $H^h(A) \leq H^{h^*}(A)$, tehát tényleg $H^h = H^{h^*}$.

Ez azért hasznos számunkra, mert a definícióból látható, hogy minden p esetén $h^*(p) \leq \inf_{n,q}\{n \cdot h(q) \ : \ n \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{R}^+,\ nq > p\}$, így elég ilyen alakú függvények között keresni a gauge-függvényt, mert ha létezik, akkor ilyen alakú is létezik. Ám ez sem elég erős ahhoz, hogy ki tudjuk zárni megfelelő gauge-függvény létezését, mivel ilyen típusú függvényből is könnyű olyat gyártani, amire létezik a fent definiált a_i és b_i sorozat minden $c < s < t < 1$ esetén.

Innen nem tudtam befejezni a bizonyítást, hogy nem létezik gauge-függvény. Ehhez vagy az kéne, hogy még valahogy szűkítsem a függvény-osztályt, amiből a gauge-függvény származhat, de szerintem ezt nem lehet tovább szűkíteni, vagy kéne még valamit megállapítanunk a $\Lambda(x)$ halmazról, ám ilyen irányba sem sikerült eredményt elérnem.

3.2. Mérhetetlen halmazok

3.4. Definíció. Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmazt mérhetetlennek (immeasurable) nevezünk, ha minden eltolás-invariáns Borel-mértékre nézve nullmértékű vagy nem σ-véges.

Világos, hogy minden gauge-függvényből származtatott Hausdorff-mérték eltolás-invariáns, így amennyiben belátnánk, hogy $\Lambda(x)$ mérhetetlen, abból egyből következne, hogy nincs megfelelő gauge-függvény. Tehát feltehetjük a következő, erősebb kérdést:

3.5. Kérdés. Igaz-e valamelyik (vagy minden) $x \in (0, \frac{1}{2})$ esetén, hogy a $\Lambda(x)$ mérhetetlen?

Mérhetetlenségről Keleti és Elekes cikkét [4] használtam bevezetőnek. Itt bevezetik a fogalmat, és bebizonyítják, hogy a Liouville-számok halmaza mérhetetlen. Emellett egyéb mérhetetlen halmazokat is mutatnak.

Ezek után megtaláltam és elolvastam Davies cikkét [2], amiben egy kompakt halmazról bizonyítja be, hogy mérhetetlen. Ez azért fontos eredmény, mert $\Lambda(x)$ kompakt, így ezek alapján esélyes, hogy mérhetetlen.

Azonban mindkét cikk bizonyítási módszere a definícióból kiindulva nem meglepő módon, arra megy rá, hogy felteszik, hogy létezik eltolás-invariáns Borel-mérték, majd a vizsgált A halmazról belátnak olyasmi tulajdonságot, hogy sokféleképpen önmagába tolható, és ebből ellentmondásra jutnak.

Én sem találtam más módot a mérhetetlenség megfogására, szerintem mindenképpen kéne valami eltolásos lemmákat bizonyítani a vizsgált halmazról, azonban $\Lambda(x)$-t ilyen módon egyáltalán nem tudtam megfogni, és nem is érzem úgy, hogy lennének ilyen tulajdonságai. Pont emiatt, hogy nem érzek semmilyen eltolásra szépen viselkedő tulajdonságot $\Lambda(x)$-re, azt gondolom, hogy nem lesz mérhetetlen. Gondolkodtam egy megfelelő mérték legyártásán is, de az is megfoghatatlan volt számomra.

3.3. Megfelelő gauge-függvény keresése

Természetesen a másik irány bizonyítása is megfordult a fejemben. Elkezdtem utánaolvasni, hogy vannak-e eredmények arról, hogy egy Cantor-halmazra mikor van megfelelő gauge-függvény, és hogyan lehet megtalálni. Ebben a témában íródott is néhány cikk. Megtaláltam, hogy Cabrelli, Mendivil, Molter és Shonkwiler [1] bizonyította a következőt:

Legyen $a_1, a_2, \ldots$ egy nemnegatív valósakból álló sorozat, melyben a számok összege 1. Ekkor ehhez egyértelműen tudunk rendelni egy Cantor-halmazt úgy, hogy a legkisebb pontja 0, a legnagyobb 1, és sorban az a_i számok a kiegészítő intervallumok hosszai. A sorban itt úgy értendő, hogy először a megfelelő a_1 hosszú nyílt intervallumot hagyjuk el a $[0,1]$ intervallumból, ez két részre vágja a szakaszt. Utána a bal oldaliból egy a_2, a jobb oldaliból egy a_3 hosszú nyílt intervallumot hagyunk el. Így tovább, n lépés után 2^n zárt intervallum lesz, majd a következő lépésben balról jobbra elhagyunk rendre egy $a_{2^n}, a_{2^n+1}, \ldots, a_{2^{n+1}-1}$ hosszú nyílt intervallumot. Mindezt úgy tesszük, hogy a végén egy 0 Lebesgue-mértékű C_a Cantor-halmazt kapjunk. Világos, hogy minden elhagyott intervallum helye meg van határozva, így a számsorozat egyértelműen meghatározza a Cantor-halmazt. Ekkor az általuk bizonyított tétel a következő:

3.6. Tétel. *Amennyiben az (a_n) sorozat monoton csökken, létezik olyan gauge-függvény, amire C_a-nak pozitív és véges a Hausdorff-mértéke.*

Sőt, Garcia, Molter és Scotto [3] ennél erősebbet is bizonyítottak.

3.7. Tétel. *Ha (a_i) monoton csökken akkor tetszőleges h gauge-függvény esetén*

$$\frac{1}{4} \cdot \liminf_{n\to\infty} n \cdot h\left(\frac{\sum_{j=n}^{\infty} a_j}{n}\right) \leq H^h(C_a) \leq 4 \cdot \liminf_{n\to\infty} n \cdot h\left(\frac{\sum_{j=n}^{\infty} a_j}{n}\right).$$

Ennek segítségével már egyszerű megfelelő gauge-függvényt gyártani az ilyen típusú C_a Cantor-halmazokra.

Azonban a $\Lambda(x)$ Cantor-halmaz nem ilyen. Ezt ellenőriztem több x-re, vizsgáltam a Cantor-halmaz kiegészítő intervallumainak hosszát, és azt kaptam amit várnánk a korábbaik alapján, hogy a Cantor-halmaz az $\frac{1}{2}$ körül besűrűsödik, azaz ott sokkal kisebbek a kiegészítő intervallumok, mint az x-hez közel. Így ez a módszer sem alkalmazható az esetünkben. Ennek ellenére érdekesnek találom ezeket az eredményeket, hasznosnak gondolom, hogy átolvastam ezt a két cikket.

4. Összesítés

Összességében élvezetesnek és hasznosnak tartottam ezt a félév kutatást. Hagy bennem egy kis hiányérzetet, hogy nem jött ki a kérdés, amin dolgoztam, így lényegében semmi saját eredményem nincsen, de úgy érzem, hogy sokat tanultam, fejlődtem a kutatás közben.

Szeretném megköszönni a témavezetőmnek, Keleti Tamásnak, aki elvállalta a témavezetésem, és mindvégig támogatta a kutatásomat.

Hivatkozások

[1] Cabrelli, C., Mendivil, F., Molter, U. M. and Shonkwiler, R. (2004). On the Hausdorff h-measure of Cantor sets. Pacific Journal of Mathematics, 217(1), 45-59.

[2] Davies, R. O. (1971). Sets which are null or non-sigma-finite for every translation invariant measure. Mathematika, 18(2), 161-162.

[3] Garcia, I., Molter, U. and Scotto, R. (2007). Dimension functions of Cantor sets. Proceedings of the American Mathematical Society, 135(10), 3151-3161.

[4] Elekes, M. and Keleti, T. (2006). Borel sets which are null or non-σ-finite for every translation invariant measure. Advances in Mathematics, 201(1), 102-115.

[5] Rogers, C. A. (1998). Hausdorff measures. Cambridge University Press.

[6] Wang, Z., Jiang, K., Kong, D. and Li, W. (2021). On a class of self-similar sets which contain finitely many common points. arXiv preprint arXiv:2109.10014.