Önhasonló halmazok és Hausdorff-mértékük
Egyéni kutatómunka II.

Gáspár Attila
Témavezető: Keleti Tamás

1. Bevezetés

Az önhasonló halmazok Hausdorff-mértékének meghatározása általában nehéz: bár a számegyenesen van hatékony módszer a kiszámítására, magasabb dimenzióban egyetlen nem triviális esetben sem ismert a pontos érték. A kutatómunkám során azt vizsgáltam, hogy a Hausdorff-mértékre milyen becslések adhatók a halmaz átmérőjének függvényében, illetve kidolgoztam egy algoritmust, amellyel konkrét önhasonló halmazokra adhatók korlátok.

2. Iterált függvényrendszerek

2.1. Definíció. *Iterált függvényrendszernek* (röviden IFS-nek) nevezzük $\mathbb{R}^d$ hasonlóságainak egy

$$\Phi = \{\varphi_i \,|\, 1 \le i \le n\}$$

véges rendszerét, ha minden φ_i hasonlósági aránya 1-nél kisebb.

2.2. Állítás. *Legyen $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ IFS. Ekkor létezik egy egyértelmű kompakt K, amelyre teljesül, hogy*

$$K = \bigcup_i \varphi_i(K).$$

K-t a Φ attraktorának nevezzük.

2.3. Definíció. Legyen $\Phi = \{\varphi_i \,|\, i \in \Lambda\}$ IFS, és legyen λ_i a φ_i hasonlósági aránya. Jelöljük s-sel a

$$\sum_{i\in\Lambda} \lambda_i^s = 1$$

egyenlet megoldását.

2.4. Állítás. *Létezik egy egyértelmű μ valószínűségi mérték, amelyre*

$$\mu = \sum_i \lambda_i^s \varphi_i(\mu),$$

ahol $\varphi_i(\mu)(A) = \mu(\varphi_i^{-1}(A))$.

2.5. Definíció. Φ teljesíti az *erős elválasztási feltételt* (SSC), ha $\phi_i(K)\cap\phi_j(K)=\emptyset$ bármely $i \neq j$ esetén.

2.6. Állítás. *Tegyük fel, hogy Φ-re teljesül az SSC. Ekkor Φ Hausdorff-dimenziója s.*

3. IFS-ek Hausdorff-mértéke

Jelöljük $\mathcal{H}^s(K)$-val a K halmaz s-dimenziós Hausdorff-mértékét. A Hausdorff-mérték definíciója helyett végig a következő tételt fogjuk alkalmazni:

3.1. Tétel (Olsen [5]). *Tegyük fel, hogy Φ-re teljesül az SSC. Ekkor*

$$\mathcal{H}^s(K) = \inf_{\substack{U \text{ konvex nyílt} \\ \mu(U)>0}} \frac{|U|^s}{\mu(U)},$$

ahol $|U|$ az U halmaz átmérőjét jelöli.

Az előző tétel abban az esetben is igaz, ha U-ról nem tesszük fel, hogy konvex, hiszen a konvex burokra való áttérés nem növeli az átmérőt, a mértéket pedig nem csökkenti. A nyíltság is elhagyható, mert tetszőleges (legalább kételemű) A halmaznak van olyan U nyílt környezete, hogy $|U| \leq |A|(1+\varepsilon)$. Emiatt a tétel alábbi változata is igaz:

3.2. Következmény.

$$\mathcal{H}^s(K) = \inf_{\mu(A)>0} \frac{|A|^s}{\mu(A)}$$

Az $A = K$ választással a $\mathcal{H}^s(K) \leq |K|^s$ becslést kapjuk. Nyitott probléma, hogy az előző egyenlőtlenségben lehet-e egyenlőség, ha $s > 1$ nem egész. $s < 1$ esetén elérhető az egyenlőség:

3.3. Tétel (Ayer, Strichartz [1]). *Tegyük fel, hogy a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ adottak, és $\sum \lambda_i < 1$. Ekkor van olyan $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ IFS $\mathbb{R}$-en, ahol a φ_i hasonlósági aránya λ_i, és a K attraktorra teljesül, hogy $\mathcal{H}^s(K) = |K|^s$.*

Az alábbi tétel szerint kellően „szép" K esetén nem lehet egyenlőség. A tételre saját bizonyítást adtam, mert az eredeti bizonyítás kínaiul van.

3.4. Tétel ([2]). *Tegyük fel, hogy $s > 1$, és K konvex burka politóp. Ekkor $\mathcal{H}^s(K) < |K|^s$*

Bizonyítás (vázlat). Legyen V a $\operatorname{conv}(K)$ csúcsainak halmaza. Definiáljuk az alábbi irányított gráfot a V csúcshalmazon: a p-ből akkor megy él p'-be, ha $p = \varphi_i(p')$ valamilyen i-re. Világos, hogy ha $p = \varphi_i(p')$ valamilyen $p' \in K$-val, akkor $p' \in V$, ebből következik, hogy minden csúcsból vezet ki él.

Először tegyük fel, hogy $p \in V$ benne van egy körben, vagyis $p = \psi(p)$, ahol $\psi = \varphi_{i_1} \circ \ldots \circ \varphi_{i_k}$ alakú. Világos, hogy $\psi(K) \subseteq K$. Legyen C a p $\operatorname{conv}(K)$-hoz tartozó mozgáskúpja. Ekkor $\psi(C) \subseteq C$, ez csak úgy lehet, ha $C = \psi(C)$, mivel az egységgömbbel vett metszet Lebesgue-mértéke nem változik a ψ hasonlóság hatására.

Tegyük fel, hogy $K \cap \operatorname{conv}(\psi(K)) \supsetneq \psi(K)$. Ekkor $\mu(K \cap \operatorname{conv}(\psi(K)) > \mu(\psi(K)) = \lambda^s$, ahol λ a ψ hasonlósági aránya. A 3.2. képlet miatt

$$\mathcal{H}^s(K) \leq \frac{|\operatorname{conv}(\psi(K))|^s}{\mu(\operatorname{conv}(\psi(K)))} < \frac{|\psi(K)|^s}{\lambda^s} = |K|^s,$$

tehát nem teljesülhet az egyenlőség.

A továbbiakban feltesszük, hogy $K \cap \operatorname{conv}(\psi(K)) = \psi(K)$. Emiatt p-nek van olyan U környezete, ahol $U \cap K = U \cap \psi(K)$, amiből következik, hogy $A \subseteq U$ esetén $\mu(\psi(A)) = \lambda\mu(A)$. Rögzítsünk egy F_0^p félteret, amelyre $\operatorname{conv}(K) \cap F_0^p = \{p\}$, és legyen F_ε^p az F_0^p ε-nal való eltoltja $\operatorname{conv}(K)$ irányába. Ha rögzítünk egy kis $\varepsilon > 0$-t, akkor

$$\mu(F^p_{\varepsilon\lambda^m}) = \mu(\psi^m(F^p_\varepsilon)) = \lambda^{ms}\mu(F^p_\varepsilon),$$

ebből következik, hogy $\mu(F^p_\varepsilon) = O(\varepsilon^s)$, ha $\varepsilon \to 0$.

Most tegyük fel, hogy $p \in V$ nincs körben. Ekkor véges sok olyan séta indul p-ből, amelynek csak az utolsó csúcsa van körben. Ebből látható, hogy a p-nek egy környezetében K előáll véges sok körben lévő csúcs környezetének hasonlóságnál vett képének uniójaként, ezért itt is teljesül, hogy $\mu(F^p_\varepsilon) = O(\varepsilon^s)$.

Végül legyen $A = K \setminus \bigcup_{p\in V} H^p_\varepsilon$. Ekkor $|A| \le |K|(1-c_1\varepsilon)$ valamilyen $c_1 > 0$ konstanssal, ezért $|A|^s \le \le |K|^s(1-c_1 s\varepsilon + o(\varepsilon))$. Másrészt $\mu(A) \ge 1 - c_2\varepsilon^s = 1 - o(\varepsilon)$ (itt használjuk, hogy $s > 1$), tehát elég kicsi ε esetén $|A|^s < \mu(A)|K|^s$, amiből következik az állítás.

□

4. $c|K|^s$ mértékű IFS-ek

4.1. Tétel (Ma, Wu [3]). *Legyen d pozitív egész, és legyen $s \in (0,d)$, valamint $c \in (0,1)$ tetszőleges. Ekkor van olyan IFS $\mathbb{R}^d$-ben, amelyre $\mathcal{H}^s(K) = c|K|^s$.*

A bizonyításban fontos szerepe van a következő tételnek:

4.2. Tétel (Olsen [6]). *Legyen n és d rögzített. Jelöljük M-mel az SSC-t teljesítő, n hasonlóságból álló IFS-ek terét, mint $\mathrm{End}(\mathbb{R}^d)^n$ alterét. Ekkor a $\Phi \mapsto H^s(K)$ leképezés az M-re megszorítva folytonos.*

Legyen $\varepsilon > 0$. A folytonosság miatt elég, ha van olyan rögzített n, és n hasonlóságból álló IFS-eknek egy Φ_t családja ($t \in [0,1]$), amelyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

- minden t-re $\dim K_t = s$ és $|K_t| = 1$, ahol K_t a Φ_t attraktora
- a $t \mapsto \Phi_t$ leképezés folytonos
- Φ_t-re teljesül az SSC
- $\mathcal{H}^s(K_0) < \varepsilon$ és $\mathcal{H}^s(K_1) > 1-\varepsilon$

A bizonyítás lényege a Φ_0 konstrukciója: az 1 átmérőjű gömbben egy rácshálót jelölünk ki, és a rácspontokban azonos arányú középpontos hasonlóságokat veszünk be Φ_0-ba. A rácspontok meghatároznak egy olyan kockarácsot, amelyre teljesül, hogy az összes hasonlóság a rácspont körüli kockába képezi K_0-t. Jelöljük μ_0-lal a Φ_0-hoz tartozó önhasonló mértéket. Ha U egy olyan halmaz, ami legalább két kockából tartalmaz K_0-beli pontot, akkor az U átmérőjére alsó korlát adható, amiből következik, hogy az U-t metsző kockák uniójára áttérve az átmérő csak kicsivel nő. Ezután az átmérőre a következő lemma felhasználásával adhatunk felső becslést a kockák számának függvényében:

4.3. Lemma. *Legyen $\mathcal{L}^d$ a d-dimenziós Lebesgue-mérték, és jelöljük ω_d-vel a d-dimenziós egységgömb Lebesgue-mértékét. Ekkor tetszőleges mérhető $A \subseteq \mathbb{R}^d$ halmazra*

$$\mathcal{L}^d(A) \le \omega_d \left(\frac{|A|}{2}\right)^d.$$

Néhány további technikai becslés felhasználásával igazolható, hogy a rácshálót elég sűrűnek választva $|U|^s \ge (1-\varepsilon)\mu(U)$, tehát $\mathcal{H}^s(K_0) \ge 1-\varepsilon$.

Végül a Φ_t-t úgy definiáljuk, hogy a gömbfelületen hagyunk két rácspontot az átmérőre vonatkozó feltétel miatt, az összes többi rácspontra pedig egy egyre kisebb arányú középpontos kicsinyítés alkalmazunk. A kicsinyítési arányt jól megválasztva az SSC minden Φ_t-re teljesül, és elég sűrű rács esetén elérhető, hogy $\mathcal{H}^s(K) < \varepsilon$.

A bizonyítás két okból nem általánosítható a $c=1$ esetre: egyrészt a rácsháló sűrűsége, és így a hasonlóságok száma függ ε-tól; másrészt ha Φ középpontos hasonlóságokból áll, akkor $\mathrm{conv}(K)$ a hasonlóságok fixpontjainak konvex burka, ami a 3.4. tétel szerint megakadályozza az egyenlőséget.

5. Algoritmus alsó korlát keresésére

A 4.2. tétel miatt a $\mathcal{H}^s(K)=|K|^s$ teljesüléséhez elég, ha rögzített n-re a paramétertérben van egy kompakt halmaz, ahol minden IFS-re teljesül az SSC, és a $\mathcal{H}^s(K)/|K|^s$ tetszőlegesen megközelíti az 1-et. Emiatt célszerűnek tűnt számítógéppel keresni olyan IFS-eket, ahol ez az arány minél nagyobb. A számításhoz Móra [4] algoritmusát általánosítottam az SSC feltételt teljesítő önhasonló halmazok esetére.

A triviális esetek kizárása érdekében feltesszük, hogy $n>1$. Legyen D egy R sugarú zárt golyó, amelyre $K \subseteq D$. Vezessük be az $I = \{1, \ldots, n\}$ jelölést. Egy $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m) \in I^m$ indexvektor esetén legyen $E_\mathbf{i} = (\varphi_{i_1} \circ \ldots \circ \varphi_{i_m})(K)$, és hasonlóan definiáljuk a $D_\mathbf{i} = (\varphi_{i_1} \circ \ldots \circ \varphi_{i_m})(D)$-t. Nyilvánvaló, hogy $E_\mathbf{i} \subseteq D_\mathbf{i}$. Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a hasonlósági arányok, és legyen $\lambda_\mathbf{i} = \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_m}$. Ekkor $D_\mathbf{i}$ sugara $R\lambda_\mathbf{i}$, és $\mu(E_\mathbf{i}) = \lambda_\mathbf{i}^s$.

Legyen $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(I^{<\omega})$ azon véges N-ek rendszere, ahol egyik N-beli indexvektor sem kezdőszelete egy másik N-belinek. Fontos különbség az eredeti algoritmushoz képest, hogy $\mathcal{N}$-ben különböző hosszú indexvektorokat is megengedünk.

5.1. Definíció. Egy $N \in \mathcal{N}$ *fedi* az $U \subseteq \mathbb{R}^d$ halmazt, ha az alábbi két feltétel teljesül:

(i) $U \cap K \subseteq \bigcup_{\mathbf{i} \in N} E_\mathbf{i}$

(ii) bármely $\mathbf{i} \in N$-re $U \cap E_\mathbf{i} \neq \emptyset$

Vezessük be a

$$d_{\min}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \min_{\substack{x \in D_\mathbf{i} \\ y \in D_\mathbf{j}}} \|x - y\|, \quad d_{\max}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \max_{\substack{x \in D_\mathbf{i} \\ y \in D_\mathbf{j}}} \|x - y\|$$

jelöléseket.

5.2. Állítás. *Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^d$ tetszőleges halmaz, amelyre $\mu(A) > 0$, és tegyük fel, hogy egy $N \in \mathcal{N}$ fedi A-t. Ekkor*

$$\frac{|A|^s}{\mu(A)} \geq \frac{\left(\max_{\mathbf{i},\mathbf{j} \in N} d_{\min}(\mathbf{i}, \mathbf{j})\right)^s}{\sum_{\mathbf{i} \in N} \lambda_\mathbf{i}^s} =: a_N.$$

5.3. Állítás. *Legyen $\mathbf{i} \in N \in \mathcal{N}$. $\emptyset \neq J \subseteq I$ esetén definiáljuk az*

$$N_{\mathbf{i},J} = (N \setminus \{\mathbf{i}\}) \cup \{\mathbf{i}j \mid j \in J\}$$

halmazt. Ekkor az alábbi tulajdonságok teljesülnek $N_{\mathbf{i},J}$-re:

- $N_{\mathbf{i},J} \in \mathcal{N}$
- *ha N fed egy A halmazt, akkor pontosan egy J van, amelyre $N_{\mathbf{i},J}$ fedi A-t*
- *ha $N_{\mathbf{i},J}$ fedi A-t, akkor N is fedi.*

Szükségünk lesz a 3.2. állításnak egy módosított változatár:

5.4. Definíció. Egy A halmazt *jónak* nevezünk, ha $\mu(A) > 0$, és legalább két olyan $i \in I$ van, amelyre $E_i \cap A \neq \emptyset$.

5.5. Állítás.

$$\mathcal{H}^s(K) = \inf_{A \text{ jó}} \frac{|A|^s}{\mu(A)}$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ha egy A halmazra $\mu(A) > 0$, akkor $A \cap K$ legalább kételemű, így az SSC miatt van egy egyértelmű maximális hosszú $\mathbf{i}$ indexvektor, amelyre $A \cap K \subseteq E_\mathbf{i}$. Ekkor $A = (\varphi_{i_1} \circ \ldots \circ \varphi_{i_m})(A')$ alakú, ahol A' jó halmaz m maximalitása miatt. Látható, hogy $\mu(A) = \lambda_\mathbf{i}^s \mu(A')$ és $|A| = \lambda_i |A'|$, amiből következik az állítás. $\square$

5.6. Definíció. Egy $C \subseteq \mathcal{N}$ halmaz *keresztmetszet*, ha bármely jó A-t pontosan egy $N \in C$ fed.

A keresztmetszetekre az alábbi egyszerű állítások igazak:

5.7. Állítás. *Legyen C egy keresztmetszet. Ekkor*

$$\mathcal{H}^s(K) \geq \min_{N \in C} a_N.$$

5.8. Állítás. *A $C_0 = \{N \subseteq I \mid |N| \geq 2\}$ halmaz keresztmetszet.*

5.9. Állítás. *Legyen C keresztmetszet, $N \in C$ és $\mathbf{i} \in N$. Ekkor az*

$$S(C, N, \mathbf{i}) = (C \setminus \{N\}) \cup \{N_{\mathbf{i},J} \mid \emptyset \neq J \subseteq I\}$$

is keresztmetszet.

Az algoritmus futása során rekurzívan definiáljuk a keresztmetszeteknek egy (C_k) sorozatát. C_0-t az 5.8. állítás szerint definiáljuk. Ha C_k-t már definiáltuk, akkor válasszunk egy $N \in C_k$-t úgy, hogy a_N minimális legyen. Ezután válasszuk meg $\mathbf{i} \in N$-et úgy, hogy $\max_{\mathbf{j} \in N} d_{\max}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ maximális, ezek között pedig $\lambda_{\mathbf{i}}$ maximális. Végül legyen $C_{k+1} = S(C_k, N, \mathbf{i})$.

Az 5.7. állítás felhasználásával minden lépés után kapunk egy alsó korlátot $\mathcal{H}^s(K)$-ra. A következő állításból adódik, hogy a kapott alsó korlátok tetszőlegesen megközelítik $\mathcal{H}^s(K)$-t:

5.10. Állítás. *Válasszuk $\mathbf{i} \in N \in C_k$-t az algoritmus szerint. Ekkor van olyan k-tól független c konstans, amelyre $a_N \geq (1 - c\lambda_{\mathbf{i}})\mathcal{H}^s(K)$.*

Bizonyítás. Legyen $\Delta = \min\{d(E_i, E_j) \mid i, j \in I\}$, az SSC miatt $\Delta > 0$. Ellenőrizhető, hogy az N-beli indexvektorok első koordinátái között legalább kétféle érték szerepel, mivel ez minden C_0-beli halmazra teljesül. Legyen $\mathbf{j} \in N$ olyan, amelyre $d_{\max}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ maximális, ekkor $d_{\max}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \geq \Delta$. A $\lambda_{\mathbf{i}}$ maximalitása miatt $\lambda_{\mathbf{j}} \leq \lambda_{\mathbf{i}}$, tehát $d_{\min}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \geq d_{\max}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) - 2\lambda_{\mathbf{i}} R - 2\lambda_{\mathbf{j}} R \geq d_{\max}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) - 4\lambda_{\mathbf{i}} R$. Ebből adódik, hogy

$$\frac{d_{\min}(\mathbf{i}, \mathbf{j})}{d_{\max}(\mathbf{i}, \mathbf{j})} \geq 1 - \frac{4\lambda_{\mathbf{i}} R}{d_{\max}(\mathbf{i}, \mathbf{j})} \geq 1 - \frac{4\lambda_{\mathbf{i}} R}{\Delta}.$$

Legyen $A = \bigcup_{\mathbf{i} \in N} E_{\mathbf{i}}$. A $d_{\max}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ maximalitása miatt $|A| \leq d_{\max}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Legyen $c_0 = \max(1, s)$, ekkor $x \in$ $\in (0, 1)$-re $(1 - x)^s \geq 1 - c_0 x$.

$$a_N \geq \frac{d_{\min}(\mathbf{i}, \mathbf{j})^s}{\mu(A)} \geq \left(1 - \frac{4\lambda_{\mathbf{i}} R}{\Delta}\right)^s \frac{d_{\max}(\mathbf{i}, \mathbf{j})^s}{\mu(A)} \geq \left(1 - \frac{4c_0 R}{\Delta}\lambda_{\mathbf{i}}\right) \frac{|A|^s}{\mu(A)} \geq \left(1 - \frac{4c_0 R}{\Delta}\lambda_{\mathbf{i}}\right) \mathcal{H}^s(K),$$

tehát a $c = \frac{4c_0 R}{\Delta}$ teljesíti a feltételt. $\square$

Az algoritmust lefuttattam néhány konkrét esetben. Például ha $d = 2$, $N = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}6$, és a hasonlóságok forgásszöge $78°$, illetve $282°$, akkor $0{,}968|K|^s < \mathcal{H}^s(K) < 0{,}982|K|^s$. Ennél jobb arányt nem találtam. Ebben a példában a konvex buroknak kevés csúcsa van, ezért úgy sejtem, két hasonlóság nem elég $d = 2$ és $s > 1$ esetén (szemben az $s < 1$ esettel, ahol a 3.3. tétel miatt N tetszőlegesen megválasztható).

Hivatkozások

[1] Elizabeth Ayer és Robert S. Strichartz. “Exact Hausdorff measure and intervals of maximum density for Cantor sets”. *Transactions of the American Mathematical Society* 351 (1999), 3725–3741. old.

[2] W. H. He, J. Luo és Z. L. Zhou. H. “Hausdorff Measure and Isodiametric Inequalities”. *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series* 48.5, 939 (2005), 939–946. old. DOI: 10.12386/A20050114. URL: https://www.actamath.com/Jwk_sxxb_cn/EN/10.12386/A20050114.

[3] Cai-Yun Ma és Yu-Feng Wu. “A note on Hausdorff measures of self-similar sets in $\mathbb{R}^d$”. *Annales Fennici Mathematici* 46.2 (2021), 957–963. old. DOI: 10.5186/aasfm.2021.4661. URL: https://doi.org/10.5186%2Faasfm.2021.4661.

[4] Péter Móra. “Estimate of the Hausdorff measure of the Sierpinski triangle”. *Fractals* 17.2 (2009), 137–148. old.

[5] Lars Olsen. “Density theorems for Hausdorff and packing measures of self-similar sets”. *Aequationes Mathematicae* 75.3 (2008. jún.), 208–225. old. ISSN: 0001-9054. DOI: 10.1007/s00010-007-2917-3.

[6] Lars Olsen. “Hausdorff and packing measure functions of self-similar sets: continuity and measurability”. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 28.5 (2008), 1635–1655. old. DOI: 10.1017/S0143385707000922.