Önhasonló halmazok és Hausdorff-mértékük

Egyéni kutatómunka II.

Gáspár Attila
Témavezető: Keleti Tamás

2022. május 20.

Iterált függvényrendszerek

Definíció

Iterált függvényrendszer (IFS): $\mathbb{R}^d$ hasonlóságainak egy

$$\Phi = \{\varphi_i \,|\, 1 \le i \le n\}$$

véges rendszere, ahol φ_i hasonlósági aránya $\lambda_i < 1$.

Állítás

Létezik egy egyértelmű kompakt K, amelyre

$$K = \bigcup_i \varphi_i(K).$$

Definíció

Jelöljük s-sel a $\sum_{i \in \Lambda} \lambda_i^s = 1$ egyenlet megoldását.

Iterált függvényrendszerek

Állítás

Létezik egy egyértelmű μ valószínűségi mérték, amelyre

$$\mu = \sum_i \lambda_i^s \varphi_i(\mu),$$

ahol $\varphi_i(\mu)(A) = \mu(\varphi_i^{-1}(A))$.

Definíció

Φ teljesíti az *erős elválasztási feltételt* (SSC), ha $\phi_i(K) \cap \phi_j(K) = \emptyset$ bármely $i \neq j$ esetén.

Állítás

Tegyük fel, hogy Φ-re teljesül az SSC. Ekkor K Hausdorff-dimenziója s.

IFS-ek Hausdorff-mértéke

Jelöljük $\mathcal{H}^s(K)$-val a K halmaz s-dimenziós Hausdorff-mértékét.

Tétel (Olsen)

Tegyük fel, hogy Φ-re teljesül az SSC. Ekkor

$$\mathcal{H}^s(K) = \inf_{\substack{U \text{ konvex nyílt} \\ \mu(U)>0}} \frac{|U|^s}{\mu(U)},$$

ahol $|U|$ az U halmaz átmérőjét jelöli.

Következmény

$$\mathcal{H}^s(K) \leq |K|^s$$

IFS-ek Hausdorff-mértéke

Kérdés

Mikor lehet $\mathcal{H}^s(K) = |K|^s$?

Tétel (Ayer, Strichartz)

Tegyük fel, hogy a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ adottak, és $\sum \lambda_i < 1$. Ekkor van olyan $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ IFS $\mathbb{R}$-en, ahol a φ_i hasonlósági aránya λ_i, és a K attraktorra teljesül, hogy $\mathcal{H}^s(K) = |K|^s$.

Ha $s > 1$ nem egész, akkor egyetlen esetben sem ismert a Hausdorff-mérték pontos értéke.

IFS-ek Hausdorff-mértéke

Tétel (He, Luo, Zhou)

Tegyük fel, hogy $s > 1$, és K konvex burka politóp. Ekkor $\mathcal{H}^s(K) < |K|^s$.

Bizonyítás.

- Vágjuk le a K konvex burkának csúcsait ε távolságra lévő hipersíkokkal, a kapott halmaz legyen A
- Ha $\mathcal{H}^s(K) = |K|^s$, akkor minden csúcsnál $O(\varepsilon^s)$ μ-mértékű részt vágunk le
- $s > 1$, ezért $\mu(A) = 1 - o(\varepsilon)$
- $|A| \leq |K| - c\varepsilon$ valamilyen $c > 0$ konstanssal
- Elég kicsi ε esetén $|A|^s < \mu(A)|K|^s$

$\square$

A Hausdorff-mérték folytonossága

Tétel (Olsen)

Legyen n és d rögzített. Jelöljük M-mel az SSC-t teljesítő, n hasonlóságból álló IFS-ek topologikus terét, mint $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)^n$ alterét. Ekkor a $\Phi \mapsto H^s(K)$ leképezés az M-re megszorítva folytonos.

Következmény

Elég lenne M-ben egy olyan kompakt részhalmazt találni, amin s konstans, teljesül az SSC, és a $\mathcal{H}^s(K)/|K|^s$ tetszőlegesen megközelíti az 1-et.

$c|K|^s$ mértékű IFS-ek

Tétel (Ma, Wu)

Legyen d pozitív egész, és legyen $s \in (0, d)$, valamint $c \in (0, 1)$ tetszőleges. Ekkor van olyan IFS $\mathbb{R}^d$-ben, amelyre $\mathcal{H}^s(K) = c|K|^s$.

Bizonyítás.

Legyen $\varepsilon > 0$. Elég, ha van IFS-eknek egy $(\Phi_t)_{t\in[0,1]}$ családja, amelyre

- minden t-re $\dim K_t = s$ és $|K_t| = 1$, ahol K_t a Φ_t attraktora,
- a $t \mapsto \Phi_t$ leképezés folytonos,
- Φ_t-re teljesül az SSC,
- $\mathcal{H}^s(K_0) > 1 - \varepsilon$ és $\mathcal{H}^s(K_1) < \varepsilon$.

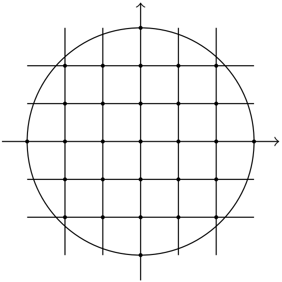
$c|K|^s$ mértékű IFS-ek

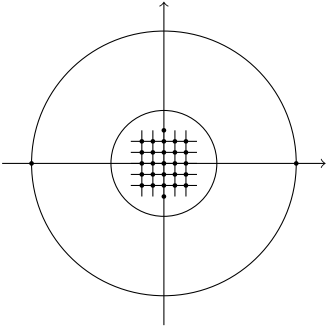
Lemma

Legyen $\omega_d = \mathcal{L}^d(B(0,1))$. Ekkor tetszőleges mérhető $A \subseteq \mathbb{R}^d$-re

$$\mathcal{L}^d(A) \le \omega_d \left(\frac{|A|}{2}\right)^d.$$

Φ_1 és Φ_0 konstrukciójának illusztrációja a cikkből:





Algoritmus alsó korlát keresésére

- Feltesszük, hogy Φ-re teljesül az *SSC*
- $E_{\mathbf{i}} = (\varphi_{i_1} \circ \cdots \circ \varphi_{i_m})(K)$
- $\mathcal{N}$ azon véges indexvektor-halmazok rendszere, amikhez diszjunkt $E_{\mathbf{i}}$-k tartoznak
- $N \in \mathcal{N}$ *fedi* A-t:
  - $A \cap K \subseteq \bigcup_{\mathbf{i} \in N} E_{\mathbf{i}}$
  - bármely $\mathbf{i} \in N$-re $A \cap E_{\mathbf{i}} \neq \emptyset$
- Ha $N \in \mathcal{N}$, és N fedi A-t, akkor $|A|^s / \mu(A)$-ra egy a_N alsó becslés adható
- $C \subseteq \mathcal{N}$ *keresztmetszet*, ha minden A-t, ami $E_1, \ldots, E_n$ közül legalább kettőt metsz, pontosan egy $N \in C$ fed
- Ha C keresztmetszet, akkor $\mathcal{H}^s(K) \geq \min_{N \in C} a_N$

Algoritmus alsó korlát keresésére

- Lépésenként finomítjuk a C keresztmetszetet
- Válasszuk azt az $N \in C$-t, amelyre a_N minimális
- Legyen $d_{\max}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ olyan, hogy minden $x \in E_{\mathbf{i}}, y \in E_{\mathbf{j}}$ esetén $\|x - y\| \le d_{\max}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$
- Válasszuk azt az $\mathbf{i} \in N$-et, amelyre $\max_{j \in N} d_{\max}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ maximális, és ezek között $|E_{\mathbf{i}}|$ maximális
- Az $\mathbf{i}$ helyett vegyük a közvetlen leszármazottainak nem üres részhalmazait, az N helyett ezeket rakjuk C-be

Állítás

A fenti algoritmussal kapott alsó korlát $\mathcal{H}^s(K)$-hoz konvergál.

Az algoritmus egy lépése