Morse-Bott függvények az unitér csoporton

Beke Márton
Témavezető: Terpai Tamás

2021/22/2.

1. $\operatorname{Re}\lambda_2$ kritikus pontjai

Most a karakterisztikus polinom második együtthatójának valós részével kezdünk el foglalkozni, jelölje ezt $\operatorname{Re}\lambda_2(A)$. Koordinátás alakban ez a függvény a főátló 2×2-es minormátrixai valós részének összegét jelenti. Mivel minden pont konjugáltosztálya belemetsz az átlós mátrixok alkotta tóruszba[1], szintén a nyomhoz hasonlóan elegendő a maximális tórusz $\mathbb{T} = diag(e^{i\theta_j})$ elemeit tekinteni. [Fra65, Lemma 1.]-ből következik, hogy elegendő a maximális tórusz érintőirányaiban tekinteni $\mathrm{T}\operatorname{Re}\lambda_2$-t, mert $\nabla\operatorname{Re}\lambda_2 \in \mathrm{T}\mathbb{T}$. Legyen most $A = diag(e^{i\theta_j})$, ekkor $\lambda_2(A) = \sum_{i<j} e^{i(\theta_i+\theta_j)}$ fog teljesülni. Ha megnöveljük az egyik θ_j-t ϵ-nal, a függvény értéke $e^{i(\theta_j+\epsilon)}\sum_{k\neq j} e^{i\theta_k} + \sum_{\substack{k,l\neq j\\ k<l}} e^{i(\theta_k+\theta_l)}$-re változik, tehát egy kritikus pontban mindenképpen teljesülnie kell, hogy egy sajátérték aránya az összes összegéhez egy valós szám legyen. Jelölje $\underline{t} = (e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n})^\intercal$ a sajátértékekből álló vektort és $\underline{1} = (1,\ldots,1)^\intercal$. Továbbá legyen $\underline{r} = (r_1,\ldots,r_n)^\intercal$ az arányok alkotta vektor. Ezekkel a jelölésekkel az $(I - \underline{r}\cdot\underline{1}^\intercal)t = 0$ egyenletrendszert kell megoldanunk. Kivonva a mátrix első oszlopát a többiből, majd hozzáadva az elsőhöz az összes többi sort könnyen látható, hogy a determináns $1-\sum r_i$, ki kell kötnünk hogy ez 0 legyen, hiszen $e^z \neq 0$, a triviális megoldás nem felel meg nekünk.

$$\begin{bmatrix} 1-r_1 & -r_1 & \ldots & -r_1 \\ -r_2 & 1-r_2 & \ldots & -r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_n & -r_n & \ldots & 1-r_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1-r_1 & -1 & \ldots & -1 \\ -r_2 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_n & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1-\sum r_i & 0 & \ldots & 0 \\ -r_2 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -r_n & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Az előbbi eliminációból világos, hogy az $I - \underline{r}\cdot\underline{1}^\intercal$ mátrix rangja $n-1$. A determinánsra tett feltétel miatt legyen mondjuk $r_n \neq 0$. Ekkor világos, hogy $(\frac{r_1}{r_n},\ldots,\frac{r_n}{r_n})^\intercal \in kerA$, és mivel ez a mag pontosan 1 dimenziós, ez ki is feszíti. Tehát a kritikus pont kandidátusaink $p_\theta = diag(\pm e^{i\theta},\ldots,+e^{i\theta})$ alakú mátrixok lesznek. Minden kritikus orbitban van egy olyan reprezentáns amelynek az első k átlós eleme $+e^{i\theta}$, s a maradék $-e^{i\theta}$. Teljesülnie kell még, hogy $\mathrm{T}\operatorname{Re}\lambda_2(p_\theta) = 0$, ezt egyszerű deriválással ellenőrizzük. $\lambda_2(p_\theta) = \alpha e^{i2\theta}$, ahol $\alpha \in \mathbb{N}$, innen a valós rész deriváltja $-2\alpha\sin(2\theta)$, vagyis egy adott pont pontosan akkor kritikus, ha $2\theta = m\pi$, vagy $\alpha = 0$, a kritikus pontjaink tehát $e_k = diag(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1)$, ie_k alakúak (ahol e_k-ban k darab 1-es szerepel). A kritikus értékekhez kiszámoljuk az α együtthatót. Ha k darab r_j pozitív, a többi negatív, akkor $\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2}$ darab 1-es, és $k(n-k)$ darab -1-es lesz az összegben, vagyis $\alpha = 2k^2 - 2kn + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$. Következésképp $\operatorname{Re}\lambda_2(e_k) = \alpha$, és $\operatorname{Re}\lambda_2(ie_k) = -\alpha$.

[1] és a karakterisztikus polinom osztályfüggvény

2. Nullaltér és index

A 4. alfejezetben leírt módszerrel ellenőriztük, hogy $U(3)$-on $\operatorname{Re}\lambda_2$ egy Morse-Bott függvényt definiál. Az alábbi táblázat foglalja össze a második derivált negatív definit és nullalterének dimenzióit függvényérték szerint növekvő sorrendben. A kritikus sokaságok pont az egyes diagonális mátrixok konjugáltosztályai lesznek, vagyis komplex Grassmann sokaságok [Fra65]. Ezek dimenzióját összevetve a nullaltér dimenziójával kapjuk hogy valóban nemelfajultak (legalább akkora dimenziós a nullaltér, mint a kritikus sokaság és nem nagyobb)[2].

sajátértékek	$\pm(i,i,i)$	$\pm(1,1,-1)$	$\pm(i,i,-i)$	$\pm(1,1,1)$
(dim nullaltér, dim negatív altér)	$(0,0)$	$(4,1)$	$(4,4)$	$(0,9)$

Ezzel kapunk egy, a $\operatorname{Re}\operatorname{Tr}$-hez képest „kétszer akkora" lánckomplexust ugyanarra a homológiára, hiszen mostmár nem egy, hanem két kritikus Grassmannt látunk minden k^2 indexben[3] (ahol $0 \le k \le 3$). A $\operatorname{Re}\lambda_2$ függvény az $A \mapsto -A$ diffeomorfizmusra invariáns, továbbá $\operatorname{Re}\lambda_2(iA) = -\operatorname{Re}\lambda_2(A)$ nyilvánvaló. Ezen szimmetriák miatt elegendő a $diag(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1)$ alakú kritikus pontok altereit meghatározni, ahol legalább annyi pozitív elem van, mint negatív. Az i-vel való szorzás az előbbiek szerint felcseréli a pozitív és a negatív altereket, a -1-el való szorzás pedig nem változtat semmin, így az alábbi táblázatból meghatározhatóak már a négydimenziós unitér csoporton $\operatorname{Re}\lambda_2$ második derivált bilineáris formájának indexei és nullalterei is a diagonális kritikus pontokban[4].

sajátértékek	$(1,1,1,1)$	$(1,1,1,-1)$	$(1,1,-1,-1)$
(dim nullaltér, dim negatív altér)	$(0,16)$	$(14,1)$	$(8,1)$

Látjuk tehát, hogy 4 dimenzióban elfajulás következik be, a várt 6 helyett 14 dimenziós az egyik nullaltér. Ezt közvetlenül is láthatjuk, a 4. részben megadott bázis irányait reprezentáló görbék

$$\begin{bmatrix} cos(t) & sin(t) & 0 & 0 \\ -sin(t) & cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

alakúak az első három koordinátához tartozó „valós" irányban, illetve egy előjelváltással a negyedikben. A karakterisztikus polinom második együtthatója a 2×2-es főminordeterminánsok összege, vagy tömörebb alakban $\frac{(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)}{2}$, ezt alkalmazva közvetlenül látjuk, hogy ezen görbék mentén azonosan nulla λ_2, hasonlóan a „komplex" forgatásokra, végül a diagonális komplex elemek különbségei is egy újabb független elfajuló irányt produkálnak, tehát a $diag(e^{-it}, e^{it}, 1, -1)$ alakú mátrixoknak is látványosan nulla a függvényértékük.
A teljesség kedvéért egy hasonló táblázat az öt dimenziós esetről:

sajátértékek	$(1,1,1,1,1)$	$(1,1,1,1,-1)$	$(1,1,1,-1,-1)$
(dim nullaltér, dim negatív altér)	$(0,25)$	$(8,16)$	$(12,1)$

Visszatérve a négydimenziós problémához a következőkben röviden tárgyaljuk [KP21]-t, melyben egyfajta kiterjesztést adnak a Morse-Bott homológiának az elfajuló esetre.

[2] Továbbá az is látszik rögtön, hogy nagyobb indexű kritikus sokaságból kisebb indexűbe nem mehet integrálgörbe, amit néhány szerző, pl. [AB95] megkövetel

[3] v.ö. [Fra65, 3. III.eset]

[4] Az i^k-val való szorzás diffeomorfizmus, és ezek ismételt alkalmazása megadja az imént megtalált kritikus pontokat

3. Degenerált kritikus halmazok

Legyen (M, g) egy zárt Riemann sokaság és $f : M \to \mathbb{R}$ egy függvény, melynek kritikus halmazának véges sok összefüggőségi komponense van. Az $\mathbb{F}$ egy fix testet jelöl.

3.1. Definíció ([KP21, 1.1])**.** Ha $C \in \pi_0(Crit(f))$ egy kritikus komponens, környezeteinek egy $U_n(C)$ sorozatát *Morse környezetrendszernek* nevezzük, ha $U_n(C)$

- C-n kívül nem tartalmaz más kritikus pontot
- a belsejében tartalmazza $U_{n+1}(C)$-t és $\cap_n U_n(C) = C$
- kompakt sarkos részsokasága M-nek
- pereme két komponensre bomlik $(\partial_\pm U_n(C))$, a sarok ezeknek a metszete és $\partial\partial U_n(C) = f^{-1}(c) \cap \partial U_n(C)$ (ahol $f(C) = c$)
- egyik peremkomponensére $\operatorname{int} \partial_+ U_n(C) \subset f^{-1}(c, \infty)$ teljesül, és $\nabla f|_{\operatorname{int} \partial_+ U_n(C)}$ $U_n(C)$-be „befelé mutat"
- másik peremkomponensére $\operatorname{int} \partial_- U_n(C) \subset f^{-1}(-\infty, c)$ teljesül, és $\nabla f|_{\operatorname{int} \partial_- U_n(C)}$ $U_n(C)$-ből „kifelé mutat".

3.2. Tétel ([KP21, 1.11])**.** *Tetszőleges $f : M \to \mathbb{R}$-hez, ha $|\pi_0(Crit(f))| < \infty$, akkor minden kritikus komponenshez létezik Morse környezetrendszer, továbbá a $H_*(U_n(C), \partial_- U_n(C); \mathbb{F})$ homológiacsoportok függetlenek n-től, a Riemann metrikától és a Morse környezetrendszer választásától.*

A konstrukcióhoz a $||\nabla f||^2$ függvény reguláris értékeinek őseit kell tekinteni a c-hez tartozó szinthalmazban, majd ezekhez megfelelő környezeteket választani M-ben [KP21, 1.9-10]. A gradiens folyamot felhasználva kapunk retrakciót $U_n(C) \to U_{n+1}(C) \cup f^{-1}(c) \cap \{U_n(C) \setminus U_{n+1}(C)\}$, ami a peremeken is megfelelően viselkedik és így a kivágási tételt alkalmazva kapjuk a homológiák izomorfizmusát [KP21, 1.3]. A metszet-, és a tartalmazásfeltétel, továbbá a kompaktság miatt ha két különböző metrikához is választunk Morse környezetrendszert, akkor kellően nagy indexre $V_N(C) \subset \operatorname{int} U_n(C)$ teljesülni fog. A metrikát lokálisan módosítva, hogy a megfelelő környezetek peremén megegyezzen a hozzájuk tartozó metrikával az előző konstrukcióban megadott izomorfizmus mutatja, hogy itt is megegyeznek a peremre vett relatív homológiái a környezetrendszer tagjainak. [KP21, 1.8]
Továbbá ezen homológiacsoportokra is teljesülnek a Morse egyenlőtlenségek, vagyis

$$\sum_i t^i \dim_{\mathbb{F}} H_i(U_n(C), \partial_- U_n(C); \mathbb{F}) - P_M(t) = (1+t)Q(t),$$

ahol $Q(t)$ minden együtthatója nemnegatív, $P_M(t)$ pedig M $\mathbb{F}$-feletti Poincaré polinomját jelöli [KP21, 1.12. tétel]. A bizonyítás hasonló szálakat követ, mint a klasszikus esetben. A gradiens folyam mutatja, hogy kritikus érték átlépéséig nem változik $f^{-1}(-\infty, a)$ diffeomorfizmus típusa, majd egy kritikus érték átlépésekor az egyes kritikus komponensekhez tartozó környezetek ragadnak a szinthalmazhoz.

4. Szimbolikus számolások `MATLAB`ban

A konkrét indexek kiszámítása már alacsonydimenziós esetekben is meglehetősen fáradságos, könnyen elhibázható feladat, ezért ezt főként a `MATLAB` nyelv szimbolikus programcsomagjával végeztük. Kézenfekvő bázis a Lie-algebrának azokat a mátrixokat választani, melyekben vagy a (j, k). és (k, j). helyeken i szerepel (beleértve a diagonálisakat is[5]), illetve melyeknél 1, illetve -1 szerepel szimmetrikusan és minden egyéb koordináta nulla. Az `E1` mátrix lesz a kritikus pont melynek az indexét meghatározzuk, a mérete `n`$\times$`n`.

```
syms t
assume(t,'real')
D=sym(zeros(n,n,n,n));

for i=1:n
    for j=1:n
        A=sym(zeros(n));
        if j<=i
            A(i,j)=t*1i;
            D(:,:,i,j)=(A+conj(A'));
        else
            A(i,j)=t;
            D(:,:,i,j)=(A-A');
        end
    end
end
```

Sajnos ezek a bázisvektorok nem felcserélhetőek, általában nem is világos, hogy lehet-e egy pontnak páronként 0 Lie-zárójelű vektorokkal kifeszíteni az érintőterét, ezért hogy az indexet kiszámolhassuk a polarizációs azonosságra hagyatkozunk. Először a bázisvektorok páronkénti összegeit számoljuk ki (a továbbiakban `C=D`, csak nem $n \times n$-en, hanem n^2-en indexelve).

```
dp=sym(zeros(n,n,n*n,n*n));
for i=1:n*n
    for j=1:n*n
        dp(:,:,i,j)=(C(:,:,i)+C(:,:,j));
    end
end
```

Ezután kiszámoljuk a mátrixhatványokat és a keletkező görbéket eltoljuk az `E1` pontba, aminek az indexére kiváncsiak vagyunk.

```
E=sym(zeros(n,n,n*n,n*n));
for i=1:n*n
    for j=1:n*n
        E(:,:,i,j)=E1*expm(dp(:,:,i,j));
    end
end
E=simplify(E);
```

Végül alkalmazhatjuk a polarizációs azonosságot. Kétszer deriválva és a nullát behelyettesítve megkapjuk a $H_{E1}(X, X)$[6], majd a $H_{E1}(X + Y, X + Y)$ értékekből kifejezzük $H_{E1}(X, Y)$-t és megtöltjük az I mátrixot, ami a H_{E1} bilineáris forma mátrixa lesz az adott bázisunkban.

```
I=sym(zeros(n*n));
for i=1:n*n
    v=charpoly(E(:,:,i,i));
    eqn=v(3);
    d2=diff(eqn,t,2);
    I(i,i)=subs(d2,t,0)/4;
end

for i=1:n*n
```

[5] Ezeknél valójában $2i$ szerepel a generálás tisztasága végett, ez persze az indexet nem befolyásolja

[6] Az iránypárok eltárolásánál minden bázisvektor önmagával is össze lett adva, ezért itt 4-el osztunk

```
    for j=1:n*n
        if i<j
            v=charpoly(E(:,:,i,j));
            eqn=v(3);
            d2=diff(eqn,t,2);
            I(i,j)=(subs(d2,t,0)-I(i,i)-I(j,j))/2;
            I(j,i)=I(i,j);
        end
    end
end
I=simplify(I);
```

A nem átlós elemek számítását persze az az a priori ismeret segíti hogy a második derivált egy szimmetrikus bilineáris forma, így elegendő a főátló feletti elemeket kiszámítani és szimmetrizálni.

```
[V,L]=eig(I);
L=diag(L);
[size(L(L<0),1),size(L(L==0),1),size(L(L>0),1)]
```

A két helyen is alkalmazott `simplify` parancs kulcsfontosságúnak bizonyult. A sajátértékek számítási idejét több óráról néhány percre csökkentette a mátrixelemek formális egyszerűsítése. Így is csak nagyon alacsony dimenziós eseteket tudunk ezen módszerrel egzaktul meghatározni, ennek ellenére elengedhetetlennek bizonyult megpróbálni megérteni $\operatorname{Re}\lambda_2$ Morse-elméleti viselkedését.

Hivatkozások

[AB95] David M Austin and Peter J Braam. Morse-bott theory and equivariant cohomology. In The Floer memorial volume, pages 123–183. Springer, 1995. doi:10.1007/978-3-0348-9217-9_8.

[BH10] Augustin Banyaga and David Hurtubise. Morse-bott homology. Transactions of the American Mathematical Society, 362(8):3997–4043, 2010.

[Bot82] Raoul Bott. Lectures on Morse theory, old and new. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 7(2):331–358, 1982. doi:10.1090/S0273-0979-1982-15038-8.

[Bou02] Frédéric Bourgeois. A Morse-Bott approach to contact homology. PhD thesis, Stanford university, 2002.

[Fra65] Theodore Frankel. Critical submanifolds of the classical groups and Stiefel manifolds. In Stewart Scott Cairns, editor, Differential and Combinatorial Topology: A Symposium in Honor of Marston Morse, pages 37–54. Princeton University Press, 1965. doi:10.1515/9781400874842-004.

[Fra11] Theodore Frankel. The Geometry of Physics: An Introduction. Cambridge University Press, 3. edition, 2011. doi:10.1017/CBO9781139061377.

[Hut02] Michael Hutchings. Lecture notes on morse homology (with an eye towards Floer theory and pseudoholomorphic curves), 2002. `https://math.berkeley.edu/~hutching/teach/276-2010/mfp.ps`.

[KP21] Frances Kirwan and Geoffrey Penington. Morse theory without non-degeneracy. The Quarterly Journal of Mathematics, 72(1-2):455–514, 2021. doi:10.1093/qmath/haaa064.

[Mil63] John Milnor. Morse Theory. Princeton university press, 1963. doi:10.1515/9781400881802.