Morse-Bott függvények az unitér csoporton

Beke Márton
Témavezető: Terpai Tamás

ELTE Matematika Intézet egyéni kutatómunka minikonferencia
2022. május 20.

A második együttható

- $\det(xI - A) = \sum \lambda_i(A)x^{n-i}$, ahol $A \in M_n(\mathbb{C})$
- $\lambda_1 = \pm \operatorname{Tr}$
- λ_i az $i \times i$-es főminordeterminánsok összege

λ_1 Morse-elméleti viselkedése ismert, az előző dolgozatban körüljártuk, idén $\lambda_2|_{U(n)}$-et vizsgáltuk.

A kritikus pontok

- Diagonálisakat keressük, perturbációból látszik hogy akkor lesz kritikus, ha minden sajátérték aránya a többiek összegéhez valós.
- $(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ és $(i, \ldots, i, -1, \ldots, -i)$-k kritikusak és a teljes konjugált orbitjuk, két diagonális konjugált ha ugyanannyi 1 vagy i-t tartalmaznak.
- Kritikus továbbá mindenki, ahol $\lambda_2(A) = 0$

Indexek

- Kritikus sokaság nemelfajult ha a normálnyalábjára megszorítva a második derivált bilineáris forma nemelfajult.
- Szimbolikusan meghatároztuk alacsony dimenzióban
- $A \mapsto -A$-nál a függvényérték nem változik
- $A \mapsto iA$-nál előjelet vált, ezért csak a $k(1) \oplus l(-1)$ alakú kritikus pontokat nézzük, ahol $k \geq l$.

$U(3)$

sajátértékek	$(1,1,1)$	$(1,1,-1)$
$(\dim$ nullaltér, $\dim$ negatív altér$)$	$(0,9)$	$(4,1)$

- A kritikus sokaságok az egyes diagonális mátrixok konjugált orbitjai
- Előállnak $\frac{U(n)}{U(k)\times U(n-k)}$ alakban, komplex Grammannok, a dimenzió $2k(n-k)$
- $U(3)$-on tehát nincs elfajulás, a várt dimenziókat kapjuk a nullalterekre

$U(4)$

sajátértékek	$(1,1,1,1)$	$(1,1,1,-1)$	$(1,1,-1,-1)$
$(\dim$ nullaltér, $\dim$ negatív altér$)$	$(0,16)$	$(14,1)$	$(8,1)$

- Elfajulás pont a 0 függvényértéknél
- A négy kritikus $4,2$ komplex Grassmann nem fedi le a teljes szinthalmazt
- 5 dimenzióban ismét szépen viselkedik minden, valószínűleg páratlan dimenzióban is emiatt

Elfajuló kritkius halmazok

Frances Kirwan and Geoffrey Penington. Morse theory without non-degeneracy. 2021.

- Ha véges sok összefüggő komponensből áll $Crit(f)$ akkor definiálnak egy homológiaelméletet

Definíció

Morse környezetrendszer egy kritikus komponens körül egy leszálló nyílt környezetrendszer. Minden tagjának lezártja egy sarkos sokaság, a sarok a kritikus szinthalmazban van, az perem két részre bomlik, egyiken befelé, másikon kifelé mutat ∇f.

Tétel

Tétel

Minden kompakt sokaságon értelmezett f függvényre, melynek véges sok kritkius komponense van létezik minden kritikus komponenshez az előbbiekben tárgyalt környezetrendszer. Továbbá a $H_*(U_n(C), \partial_- U_n(C); \mathbb{F})$ homológiacsoportok függetlenek n-től, a metrikától és a környezetrendszer választásától.

Számítások

- `MATLAB`ban szimbolikusan számoltuk az indexeket
- A BCH formulát elkerülendő polarizációs azonossságot alkalmaztunk

Köszönöm a figyelmet!