Kétfázisú robusztus optimalizálás

Marosvári Ágnes

2020. december 17.

Bevezető

- A való életbeli optimalizálási problémák adatai gyakran tartalmazhatnak bizonytalanságot.
- A bizonytalanság kezelésére kétféle megközelítés létezik: a sztochasztikus és a robusztus optimalizálás.
- Ha a legrosszabb esetre rendezkedünk be, túlságosan konzervatív megoldást kaphatunk. Ötlet: kétfázisú modell.

Modell

$$\min_{y \in S_y} cy + \max_{u \in U} \min_{x \in F(y,u)} bx$$

$$Ay \geq d$$

$$F(y,u) = \{x \in S_x : Gx \geq h - Ey - Mu\}$$

$$S_y \subseteq \mathbb{R}^n_+, \; S_x \subseteq \mathbb{R}^m_+$$

Erről a feladatról belátható, hogy NP-nehéz.

A C&CG algoritmus

1. Legyen az alsó korlát $LB = -\infty$, a felső korlát $UB = +\infty$, $k = 0$ és $O = \emptyset$.
2. Oldjuk meg a mester problémát (MP):

$$\min_{y,\eta} cy + \eta$$

$$Ay \geq d$$

$$\eta \geq bx_l \quad \forall l \in O$$

$$Ey + Gx_l \geq h - Mu_l^* \quad \forall l \leq k$$

$$y \in S_y, \; x_l \in S_x \; \forall l \leq k, \; \eta \in \mathbb{R}_+, \; u_l^* \in U$$

Legyen MP optimális megoldása $(y_{k+1}^*, \eta_{k+1}^*, x_1^*, \ldots, x_k^*)$, és $LB = cy_{k+1}^* + \eta_{k+1}^*$.

A C&CG algoritmus

3. Definiáljuk a részproblémát (SP-t) a következő módon.

$$\mathcal{Q}(y) = \{\max_{u \in U} \min_{x} bx : Gx \geq h - Ey - Mu, x \in S_x\}$$

   Legyen $UB = \min\{UB, cy^*_{k+1} + \mathcal{Q}(y^*_{k+1})\}$.

4. Ha $UB - LB \leq \epsilon$, akkor álljunk meg. Különben:
   1. Ha $\mathcal{Q}(y^*_{k+1}) < +\infty$, vegyünk fel egy új x_{k+1} változót és a következő feltételeket MP-hez:

      $$\eta \geq bx_{k+1}$$

      $$Ey + Gx_{k+1} \geq h - Mu^*_{k+1}$$

      Legyen $k = k + 1$, és $O = O \cup \{k + 1\}$. Menjünk a 2. lépéshez.
   2. Ha $\mathcal{Q}(y^*_{k+1}) = +\infty$, akkor is vegyünk fel új x_{k+1} változót a következő feltétellel az MP-hez:

      $$Ey + Gx_{k+1} \geq h - Mu^*_{k+1}$$

      Legyen $k = k + 1$, és menjünk a 2. lépéshez.

A $\mathcal{Q}(y) = \infty$ eset

Kérdés

Hogyan találjuk meg az optimális u-t?

$$\max bx$$

$$Gx \geq h - Ey - Mu$$

$$\pi G \leq b$$

$$(Gx - h + Ey + Mu)_i \pi_i = 0 \quad \forall i$$

$$(b - \pi G)_j x_j = 0 \quad \forall j$$

$$x \in S_x, \ \pi \geq 0, \ u \in U$$

A $\mathcal{Q}(y) = \infty$ eset

Észrevétel: elegendő a $Gx \geq h - Ey - Mu$ feltétel megoldhatóságát vizsgálni. Erre a következő LP-t írhatjuk fel:

$$\max_{u \in U} \min \sum_i s_i$$

$$(Gx)_i + s_i \geq (h - Ey - Mu)_i \;\; \forall i$$

$$x \in S_x, \; s \geq 0, \; u \in U$$

Az optimum értékétől függően eldönthetjük, hogy létezik-e olyan u, amelyre SP nem megengedett.

Szolgáltató elhelyezési probléma

n gyárunk és m kliensünk van, y_i azt határozza meg, hogy az i-edik gyárat megnyitjuk-e, amelynek f_i megnyitási költsége és K_i kapacitása van, x_{ij} pedig azt, hogy az i-edik gyárból mennyit szállítunk c_{ij} költséggel a j-edik klienshez, akinek d_j (bizonytalan) igénye van.

$$\min fy + cx$$

$$\sum_j x_{ij} \leq K_i y_i \quad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} \geq d_j + u_j \tilde{d}_j \quad \forall j$$

$$u_j \leq 1 \quad \forall j$$

$$\sum_j u_j \leq \Gamma$$

$$x_{ij} \geq 0, y_i \in \{0, 1\}$$

Futásidők

Az algoritmus implementálása FICO Xpress + Mosel környezetben történt.

$n \times m$	Futásidő (mp)	Iterációk száma
5×5	0.078	3
5×5	0.062	3
5×5	0.114	4
5×5	0.21	5
15×15	2.106	5
15×15	1.215	4
15×15	2.444	6
15×15	8.577	13
25×25	37.572	5
25×25	81.219	6
25×25	25.324	6
25×25	15.558	4

Köszönöm a figyelmet!