Fertőző betegségeket leíró modellek kvalitatív vizsgálata

Önálló projekt III.

Készítette: Gyúró Noémi

Témavezető: Dr. Kovács Sándor

Eötvös Loránd
Tudományegyetem

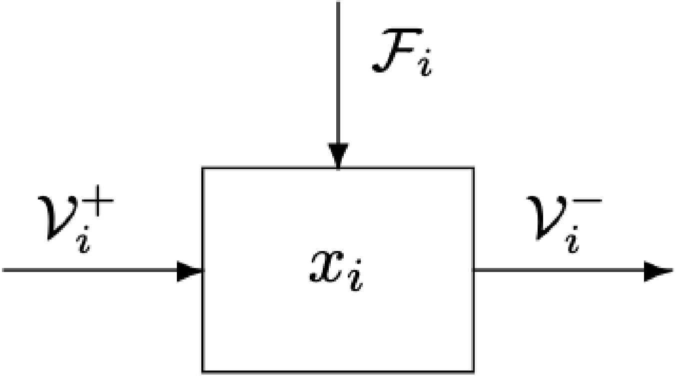
ODE

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) =: \mathcal{F}(\mathbf{x}) - \mathcal{V}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

ahol:

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, x_i \geq 0$: az i-edik osztályban lévõ egyedek száma;
- $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathfrak{C}^1$;
- $\mathcal{F}_i(x)$: i-edik osztályban lévõ fertõzött populáció „születési" rátája;
- $\mathcal{V}_i(x)^+$: az egyedek i-edik osztályba való bekerülési rátája;
- $\mathcal{V}_i(x)^-$: az egyedek i-edik osztályból való kikerülési rátája.
- $\mathcal{V}_i(x) := \mathcal{V}_i(x)^- - \mathcal{V}_i(x)^+$

ODE ráták



Feltevések

Betegségmentes állapotok halmaza:

$$X_s := \{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} : \; x_i = 0, \; i = 1, \ldots, m\}, \quad x_0 \in X_s, \quad f(x_0) = 0.$$

(F1): $x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}_i(x), \mathcal{V}_i(x)^-, \mathcal{V}_i(x)^+ \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n;$

(F2): $x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{V}_i(x)^- = 0;$

(F3): $\mathcal{F}_i(x) = 0 \quad (i > m);$

(F4): $x \in X_s \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}_i(x) = 0$ és $\mathcal{V}_i(x)^+ = 0, \quad i = 1, \ldots, m;$

(F5): $\mathcal{F}(x) \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma(Df(x_0)) \subset \mathbb{C}^-.$

Linearizált rendszer mátrixa

$$Df(x_0) = D\mathcal{F}(x_0) - D\mathcal{V}(x_0),$$

ahol

$$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad D\mathcal{V}(x_0) = \begin{bmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix},$$

ahol

$$F \in \mathbb{R}^{m\times m} \qquad \text{és} \qquad V \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

rendre az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{V}$ Jakobi-mátrixának fõminormátrixa az x_0 helyen.
Továbbá:

$$F \geq 0, \qquad V \text{ nem szinguláris } M\text{-mátrix} \qquad \text{és} \qquad \sigma(J_4) \subset \mathbb{C}^+.$$

A populációba bekerült „tipikus” fertõzõ egyed sorsa

$$\dot{x} = -D\mathcal{V}(x_0)(x - x_0) \tag{2}$$

Legyen $\psi_i(0)$ a fertõzött egyedek száma kezdetben az i-edik osztályban,

$$\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t))$$

pedig azoknak a kezdetben fetõzött egyedeknek a száma, akik t idõegység után is a fertõzött osztályban maradnak

$$\psi' = -V\psi \tag{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \psi(t) = e^{-Vt}\psi(0) \qquad (0 \le t \in \mathbb{R}).$$

Következő generációs mátrix

Az eredetileg fertõzött egyének által okozott új fertõzések várható száma:

$$\int_0^{+\infty} F\psi(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad FV^{-1}\psi(0)$$

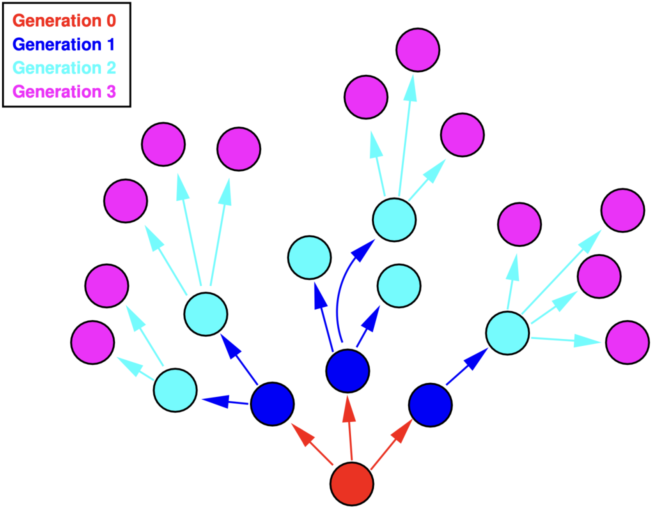
ezért a következõ generációs mátrix:

$$FV^{-1}$$

így a reprodukciós szám:

$$\mathcal{R}_0 := \rho(FV^{-1})$$

Járványterjedés gráfon



Járvány kitörés

Tétel.

Tekintsük a fertõzõ betegség terjedését modellezõ (1) *rendszert, ahol* f *teljesíti a (F1)-(F5) feltételt. Az* $x_0 \in X_s$ *betegségmentes állapot:*

$$\mathcal{R}_0 < 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ lokálisan aszimptotikusan stabilis}$$
$$\mathcal{R}_0 > 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ labilis}$$

Alkalmazás 1

$$\begin{cases} \dot{I} & = & \dfrac{\lambda dSI}{B} - (d+r)I - \dfrac{\beta I}{1+\alpha I}, \\ \dot{S} & = & B - dS - \dfrac{\lambda dSI}{B} + \nu(B/d - S - I) \end{cases} \tag{4}$$

I a fertőző, S pedig a fogékony egyedek lélekszáma,

r: a felépülési ráta,

ν: annak a rátája, amellyel a felépült egyedek elveszítik a fertõzéssel szerzett immunitást és visszatérnek a fogékony osztályba,

λ: a fertõzés valószínûsége érintkezésenként egységnyi idõ alatt,

$\dfrac{\beta I}{1+\alpha I}$ pedig a szaturációs függvény, ahol $\alpha \geq 0$ és $\beta \geq 0$.

Alkalmazás 1

(4)-nek egyetlen fertőzésmentes egyensúlyi helyzete: $E_0 = (0, B/d)$.

$$\mathcal{F} := \begin{bmatrix} \frac{\lambda dSI}{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad F := \lambda$$

$$\mathcal{V} := \begin{bmatrix} (d+r)I + \frac{\lambda dI}{1+\alpha I} \\ B - dS - \frac{\lambda dSI}{B} + \nu(B/d - S - I) \end{bmatrix}, \qquad V := d + r + \beta$$

bevezetésével a reprodukciós ráta:

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\lambda}{d + r + \beta}.$$

Alkalmazás 2

$$\begin{cases} \dot{S} = b_s - \beta SI - \psi S - \mu_s S \\ \dot{E} = \psi S + \kappa I - \mu_e E \\ \dot{I} = b_i I + \beta SI - \kappa I - \mu_i I \end{cases} \tag{5}$$

S a fogékony, I a fertõzõ, E pedig az oltott/iskolázott egyedek lélekszáma,

$\beta > 0$: az egy fõre jutó átlagos érintkezések száma idõegységenként,

$\psi \geq 0$: a fogékonyak iskolai végzettségének rátája,

$\kappa > 0$: a fertõzöttek transzmissziós rátája,

$\mu_j > 0$: halálozási ráta ($j \in \{s, e, i\}$).

Alkalmazás 2

(5)-nek egyetlen FME: $\quad (S_0, E_0, I_0) := \left(\frac{b_s}{\psi + \mu_s}, \frac{b_s}{\mu_e} \cdot \frac{\psi}{\psi + \mu_s}, 0 \right).$

$$\mathcal{F} := \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa \\ \beta S I \end{bmatrix}, \qquad F := \frac{b_s \beta}{\psi + \mu_s}$$

$$\mathcal{V} := \begin{bmatrix} -b_s + \beta S I + (\psi + \mu_s) S \\ \psi S + \mu_e E \\ (\kappa + \mu_i - b_i) I) \end{bmatrix}, \qquad V := \kappa + \mu_i - b_i$$

megválasztásával a spektrálsugár:

$$\mathcal{R}_0 := \rho\left(F V^{-1}\right) = \frac{b_s \beta}{(\psi + \mu_s)(\kappa + \mu_i - b_i)}.$$

Alkalazás 3

$$\begin{cases} \dot{E} = \beta_1 SI/N + \beta_2 TI/N - (d + \nu + r_1)E + pr_2 I, \\ \dot{I} = \nu E - (d + r_2)I \\ \dot{S} = b(N) - dS - \beta_1 SI/N, \\ \dot{T} = -dT + r_1 E + qr_2 I - \beta_2 TI/N \end{cases} \tag{6}$$

S fogényok, E fertõzésnek kitett, I fertõzõ, T kezelt egyének száma,

$\beta_1 I/N$, ill. $\beta_2 I/N$ rendre jelenti a fogékonyak ill. kezelt egyedeknek a fertõzésnek kitett osztályba való belépési rátáját, ahol

$$N = E + I + S + T,$$

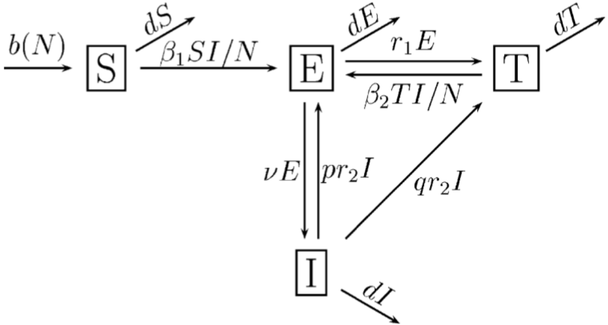
ν: a fertõzésnek kitett egyedek fertõzõ osztályba lépõ rátája,

$d > 0$: az egyének halálozási rátája,

r_1, ill. r_2 a kitett egyének, ill. fertõzõ egyének kezelési rátája,

q hányada sikeres a kezeléseknek, továbbá $p = 1 - q$.

Alkalmazás 3



Alkalmazás 3

(6)-nek FME: $x_0 = (0, 0, 1, 0)$.

$$\mathcal{F} := \begin{bmatrix} \beta_1 SI/N + \beta_2 TI/N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad F := \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V} := \begin{bmatrix} (d + \nu + r_1)E - pr_2 I \\ -\nu E + (d + r_2)I \\ -b(N) + dS + \beta_1 SI/N \\ dT - r_1 E - qr_2 I + \beta_2 TI/N \end{bmatrix}, \qquad V := \begin{bmatrix} d + \nu + r_1 & -pr_2 \\ -\nu & d + r_2 \end{bmatrix}$$

megválasztásával a spektrálsugár:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta_1 \nu}{(d + \nu + r_1)(d + r_2) - \nu pr_2}.$$

Alkalmazás 3

Decomposition of f leading to alternative thresholds

	(a)	(b)
$\mathscr{F}$	$\begin{pmatrix} \beta_1 SI/N + \beta_2 TI/N + pr_2 I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \beta_1 SI/N + \beta_2 TI/N + pr_2 I \\ vE \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathscr{V}$	$\begin{pmatrix} (d+v+r_1)E \\ -vE + (d+r_2)I \\ -b(N) + dS + \beta_1 SI/N \\ dT - r_1 E - qr_2 I + \beta_2 TI/N \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (d+v+r_1)E \\ (d+r_2)I \\ -b(N) + dS + \beta_1 SI/N \\ dT - r_1 E - qr_2 I + \beta_2 TI/N \end{pmatrix}$
F	$\begin{pmatrix} 0 & \beta_1 + pr_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \beta_1 + pr_2 \\ v & 0 \end{pmatrix}$
V	$\begin{pmatrix} d+v+r_1 & 0 \\ -v & d+r_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} d+v+r_1 & 0 \\ 0 & d+r_2 \end{pmatrix}$
$\rho(FV^{-1})$	$\dfrac{\beta_1 v + pr_2 v}{(d+v+r_1)(d+r_2)}$	$\sqrt{\dfrac{\beta_1 v + pr_2 v}{(d+v+r_1)(d+r_2)}}$