Optikai rendszerek szimulációja

Tompa Júlia

1. Bevezetés

Ebben a félévben az önálló projekt keretein belül a Gauss-féle képalkotással [1] és lencserendszerek matematikai modellezésével foglalkoztam.

A formulák egyszerűsége és használhatósága érdekében közelítsük a vizsgált (nagyon kicsi) szögek szinuszát elsőrendben: $\sin(x) \approx x$. Ez a Gauss-féle, vagy ideális képalkotás, ami bár nem veszi figyelembe az optikai rendszerek apró aberrációit, képhibáit, az optikai tengely közelében jó közelítése a valóságnak. Ekkor a képalkotás forgásszimmetriája miatt elegendő a lencserendszernek egy hosszanti metszetét tekinteni, és az euklideszi tér helyett síkban dolgozni. Továbbá mivel ezek a leképezések kollineárisak, azaz egyenest egyenesbe visznek, ezért ha a tekintett síkot beágyazzuk a térbe $z = 1$ magasságban, akkor projektív koordinátákat tekintve a leképezések lineárisak lesznek, tehát leírhatók 3×3-as mátrixok segítségével. Ez leegyszerűsíti annak megállapítását, hogy két lencsét, illetve felületet egymás után helyezve hogyan jellemezhetjük az eredő rendszert, ugyanis nem kell mást tenni, mint összeszorozni a két felülethez tartozó mátrixokat. A szorzás eredményeként kapott mátrix írja le az egymás után írt felületekhez tartozó kollineáris leképezést. A félév célja az volt, hogy pontos formulát adjunk az optikai rendszereket jellemző mátrixok elemeire a rendszer paramétereinek ismeretében. Ezenfelül létrehoztam egy C++ classt a hozzá tartozó műveletekkel, melynek segítségével egy felület adatainak megadásával megkaphatjuk a hozzá tartozó mátrix elemeit, modellezhetünk egy több felületből álló rendszert (pl. objektív) a felületek paramétereinek ismeretében, ki tudjuk számolni az eredő rendszer fókuszpontjainak és fősíkjainak, valamint a ki- és belépő pupilláknak a helyét, vagy például egy tetszőleges pont képét a rendszer szerint.

2. A mátrix elemeinek meghatározása

Tekintsünk egy optikai rendszert, ez egymás után helyezett lencsefelületekből áll. Legyen az x tengely a rendszer optikai tengelye, vagyis az az egyenes a síkban, amire szimmetrikusan helyezkednek el a felületek. Vegyük észre, hogy ekkor ha egy $[x, y, 1]$ pont képe egy $[x', y', 1]$ pont, akkor, mivel a leképezés az optikai tengelyre szimmetrikusan történik, az $[x, -y, 1]$ pont képe az $[x', -y', 1]$ pont kell legyen. Ebből könnyen kijön, hogy egy ilyen leképezés mátrixa a következőképpen fest:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Továbbá mivel projektív koordinátákat nézünk, ezért egy mátrix és a skalárszorosa ugyanazt a leképezést adják. Emiatt a mátrix tetszőleges elemét 1-nek választhatjuk, legyen tehát $a_{2,2} = 1$. Ezek szerint egy lencserendszer matematikai leírásához négy értéket kell meghatároznunk:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \end{pmatrix}.$$

2.1. Fókuszpontok és fősíkok alapján

Tegyük fel, hogy ismerjük egy lencse két fókuszpontját: F_1, F_2, valamint a fősíkok helyét: H_1, H_2. Ekkor a következő megfigyelések alapján számolhatjuk ki a keresett négy mátrixelemet:

- Az $[F_2, 0, 1]$ pont (azaz a második fókuszpont) ősképe az $[1, 0, 0]$ ideális pont, vagyis a vízszintes egyenesek "végpontja".
- Az $[F_1, 0, 1]$ pont képe az ideális pont.
- A $[H_1, 1, 1]$ pontot a leképezés a $[H_2, 1, 1]$ pontba viszi. (Itt az y koordináta bármi lehet, nem feltétlenül 1, de azzal egyszerű számolni.)

Ezen megfigyelések segítségével a következő eredmények jönnek ki a mátrix elemeire:

$$a_1 = \frac{F_2}{H_1 - F_1},\ c_1 = H_2 - \frac{H_1 \cdot F_2}{H_1 - F_1},\ a = \frac{1}{H_1 - F_1},\ c = -\frac{F_1}{H_1 - F_1}.$$

2.2. Görbület és törésmutatók alapján

Most legyen adott egy felület előjeles görbülete (ezt akkor tekintjük negatívnak, ha a görbületi középpont a felülettől "balra" helyezkedik el, vagyis az x tengelyen a felület előtt van): g, valamint a felület két oldalán található anyagok törésmutatója: n_1, n_2, továbbá a felület helye az x tengelyen: H_1. Elsőként úgy határozzuk meg a mátrixelemeket, hogy H_1-et nullának vesszük, majd egy eljárás segítségével eltoljuk a rendszert H_1-gyel.

Figyelembe véve, hogy a vízszintes sugarak megtörés után a második fókuszba érkeznek, továbbá az első fókuszponton átmenő sugarak vízszintessé törnek, egyszerűen kiszámolhatjuk a két fókuszpont helyét:

$$F_1 = \frac{N}{g \cdot (N-1)},\ F_2 = -\frac{1}{g \cdot (N-1)},$$

ahol $N = \frac{n_1}{n_2}$.

H_1 és H_2 helyére 0-t írva így a fenti összefüggésekből megkapjuk a négy mátrixelemet:

$$a_1 = \frac{1}{N},\ c_1 = 0,\ a = \frac{g \cdot (1-N)}{N},\ c = 1.$$

2.3. Eltolás

Most az a célunk, hogy egy rendszer mátrixa alapján kiszámoljuk az x tengely mentén d-vel eltolt rendszerhez tartozó mátrixot. Ehhez annyit kell megfigyelnünk, hogy ha a rendszer egy $[x, y, 1]$ pontot egy $[x', y', 1]$ pontba visz, akkor az eltolt rendszer az $[x, y+d, 1]$ pontot az $[x', y'+d, 1]$ pontba kell, hogy vigye. Ez alapján ha adott az eredeti rendszert jellemző négy szám: a_1, c_1, a, c, akkor az eltolt rendszer mátrixa a következő lesz:

$$\begin{pmatrix} a_1 + ad & 0 & c_1 + cd - a_1 d - ad^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c - ad \end{pmatrix}.$$

Az általam létrehozott C++ "Lens" class elemeit háromféleképpen definiálhatjuk. A legegyszerűbb az, ha már eleve ismerjük a rendszert vagy felületet jellemző mátrix négy lényeges elemét, ekkor ezeket paraméterként megadva definiálhatjuk az elemet. Ha a fókuszpontok és fősíkok helyét ismerjük, akkor a set_focuses setter függvény lehet segítségünkre, ami a fenti képletek alapján állítja be a privát a_1, c_1, a és c értékeket. Ha pedig a felület görbületét, valamint az általa elválasztott anyagok (levegőhöz képesti relatív) törésmutatóját ismerjük, akkor a másik, set_curvature névre hallgató setter függvényt kell alkalmaznunk. A print() parancs kiíratja az a_1, c_1, a, c számokat, valamint az adott class-elemhez tartozó fókuszpontok és fősíkok helyét, a translate(d) függvény pedig d-vel eltolja a rendszert. Létrehoztam továbbá egy szorzásoperátort, ami értelemszerűen a class két eleme által alkotott eredő rendszer mátrixát számolja ki.

Hivatkozások

[1] Dr. Bernolák - Dr. Szabó - Szilas. *A mikroszkóp zsebkönyv*. Műszaki Könyvkiadó, 1979. ISBN: 9631024555.