1. Csúcsszínezést indukáló élsúlyozások

1.1. Bevezetés

Projektmunkám témáját az 1-2-3 sejtés ihlette. Az 1-2-3 sejtés szerint minden legalább két élű összefüggő egyszerű gráf élei megsúlyozhatóak az $1, 2, 3$ számokkal úgy, hogy a csúcsokra az oda illeszkedő élek súlyösszegét írva egy megengedett csúcsszínezést kapunk. Azt mondjuk, hogy egy gráf 1-2-3 tulajdonságú, ha igaz rá a sejtés. Hasonlóan definiálható, az a-b tulajdonság, annyi eltéréssel, hogy a súlyhalmazt az $1, 2, 3$-ról lecseréljük az a, b-re. A sejtés kapcsán számos további kérdés megfogalmazható, mi a sejtés ösztönözte új területeken kezdtünk el kutatni a szakdolgozatomban majd az első félévben, és ezt a kutatást folytattuk a második félévben. Az első félévben általános gráfok a, b élsúlyozására, míg a második félévben páros gráfok a, b majd ezenbelül a 0-1 élsúlyozására koncentráltunk, mivel amint látni fogjuk a 0-1 eset gyökeresen eltér a többi a-b esettől.

1.2. Eddigi eredmények

Ebben az alfejezetben bemutatom, hogy a második félév előtt milyen eredményekre jutottunk. Már a szakdolgozatban felírtunk egy IP modellt az 1-2-3 sejtés modellezésére, amelyet később az a-b élsúlyozásos feladathoz is fel tudtunk használni.

$$
\begin{aligned}
x_i &\in \mathbb{Z} && \forall i : 1 \le i \le |E| && \text{(1a)}\\
1 &\le x_i && \forall i : 1 \le i \le |E| && \text{(1b)}\\
x_i &\le 3 && \forall i : 1 \le i \le |E| && \text{(1c)}\\
y_i &\in \mathbb{Z} && \forall i : 1 \le i \le |V| && \text{(1d)}\\
y_i &= \sum_{j \in J^*(i)} x_j && \forall i : 1 \le i \le |V| && \text{(1e)}\\
z_{ij} &\in \{0, 1\} && \forall i < j : \exists e = v_i v_j \in E && \text{(1f)}\\
y_i - y_j &\le -\epsilon + M z_{ij} && \forall i < j : \exists e = v_i v_j \in E && \text{(1g)}\\
y_i - y_j &\ge \epsilon - (1 - z_{ij}) M && \forall i < j : \exists e = v_i v_j \in E && \text{(1h)}
\end{aligned}
$$

Ahol a $J^*(i)$ azon j élindexek halmaza, melyekre e_j illeszkedik v_i-re.

Az IP modellt a LEMON [3] és a CPLEX [4] felhasználásával implementáltuk. Elsősorban a programot arra terveztük, hogy ellenőrizze, hogy az input gráf 1-2

Simon Máté projektje, témavezető: Madarasi Péter tulajdonságú-e, és csak akkor ellenőrizze az 1-2-3 tulajdonságot, ha az 1-2 nem teljesül rá. Egészen az összes 12 csúcsú gráfig le tudtuk futtatni a programot, ezzel is megbizonyosodva a sejtés helyességéről 12 csúcsig, bár már erre a csúcsszámra is két hétig futott az Atlasz [5] szuperszámítógépen. A következő csúcsszámra, azaz a 13 csúcsú gráfokra a becslésünk szerint megközelítőleg 18 évig futna a program. Látható, hogy jelentős gyorsítások nélkül a 13 csúcsú gráfokra már reménytelen, hogy végig várjuk a futást.

További területeken is használtuk a modellt. Mint például mit tudunk abban az esetben, ha van egy páros gráfunk és az éleire már kezdetben is vannak írva a, b súlyok, akkor befejezhető-e, ha megengedett a-b élsúlyozást szeretnénk. Ez azért is érdekes, mert azt viszont már tudjuk, hogy páros gráfokra polinom időben eldönthető, hogy 1-2 tulajdonságúak-e [2] (és elég sok a, b számpárra is az 1, 2-őn kívül). Viszont arra az eredményre jutottunk, hogy ebben az esetben már egy NP-teljes problémához jutunk. Ebből kifolyólag, visszalépve egyet, fákra is megvizsgáltuk a befejezhetőséget és itt már tudtunk is egy polinomiális dinamikus programozási algoritmust adni arra, hogy egy megkezdett súlyozás befejezhető-e a fákon. Vagy egy másik terület, ahol tudtuk használni a programot, Dudek és Wajc munkájához [1] kapcsolódik. Ők belátták, hogy az 1-2 tulajdonság eldöntése tetszőleges gráfra NP-teljes, és úgy sejtették a cikkük végén, hogy a módszerük tetszőleges a, b-re is kiterjeszthető. Nekünk pedig a program segítségével sikerült megmutassuk (ahol a programmal a redukcióhoz szükséges gadgetek szerkezetét sikerült megsejtenünk), hogy ez a sejtés a $-1, 1$ számpártól eltekintve fennáll. Erre a kivételes esetre egy alapjaiban eltérő redukciót kellett adjunk NAE3SAT-ról, míg a többi esetre ezt a 3-SZÍN-ről tettük meg, ahogy Dudekék.

1.3. Második féléves kutatási témák

A második félévben leginkább páros gráfokra koncentráltunk. Ezen belül két esetet különböztetünk meg: az egyik az általános a-b eset, amikor egyik szám sem 0, a másik mikor a 0-1 élsúlyozásról beszélünk.

1.3.1. Az a-b eset

Ahogy fentebb említettem, páros gráfokra polinom időben eldönthető, hogy 1-2 tulajdonságúak-e. Mégpedig úgy, hogy karakterizálhatóak a nem 1-2 tulajdonságú páros gráfok, és adható egy polinomiális algoritmus, amely ellenőrzi, hogy egy adott gráf eleget tesz-e ennek a karakterizációnak. Ezek a nem 1-2 tulajdonságú páros gráfok az úgynevezett páratlan multi-kaktuszok. Viszont a cikkben ahol ez a karakterizációt adják [2] a bizonyításból az is kijön, hogy nem csak az 1-2, hanem az a-b tulajdonság is eldönthető polinomiálisan, ha $a < b$ természetes számok és a páratlan, b páros. Tehát ezen a területen még az megoldatlanul maradt, hogy ha a és b paritása megeggyezik, akkor is polinomiálsian el lehet-e dönteni az a-b tulajdonságot. A félév egyik felében erre a feladatra koncentráltunk. Mégpedig a sejtésünk, hogy ha a, b természetes számok egyike sem 0, akkor ugyanaz a karakterizáció igaz ebben az esetben, mint az 1-2 esetben. Ezt a sejtést, pedig arra alapoztuk, hogy a fentebb definiált IP modell egy változatával tudtunk készíteni egy olyan programot, amivel 16 csúcsig le tudtuk gyártani az összes nem 1-3 és 3-5 tulajdonságú páros gráfot és azt tapasztaltuk, hogy ebben a két esetben szintén pont a páratlan multi-kaktuszok voltak az egyedüli ellenpéldák.

Ezért megpróbáltuk az 1-2-es esetre adott bizonyítást kiterjeszteni az 1-3-as esetre, remélve, hogy jól általánosítható a módszer. Az első lépés annak megmutatása lett volna, hogyha egy páros gráfnak van egy egy fokú csúcsa, akkor a-b tulajdonságú. Innentől kezdve az a-b esetről áttérünk csupán az 1-3 eset vizsgálatára. A következőkben bemutatom a megközelítési módszereket amellyekkel próbálkoztunk ezen állítás belátásán. Az 1-2 eset úgynevezett f-factorok használatával jött ki, amit a következőképpen lehet definiálni. Ha G összefüggő és $f : V \to \mathbb{Z}_k$, akkor $H \subset G$ részgráf f-factor mod k, ha $d_H(v) \equiv f(v)$ mod k minden $v \in V$-re. Ha a modulus 2 és igaz az f-ek összegére, hogy páros, akkor létezik G-ben f-factor mod 2. Ezt használva belátható, hogyha G páros és van egy csúcsa melynek foka egy, akkor az 1-2 tulajdonságú. Ezért megpróbáltunk analóg tételeket gyártani az 1-3 esetre, amivel hasonlóan be lehetne látni az állítást, de sajnos egyik tétel sem volt igaz — könnyen találtunk olyan ellenpéldákat melyekre az analóg módon megfogalmazott feltétel teljesült, viszont mégsem volt benne f-factor.

Mod 3 különböző élsúlyozás keresés szintezéssel

Ezután mivel láttuk, hogy ezen a területen nem remélhettünk előrelépést áttértünk arra, hogy azzal probálkozzunk, hogy ebben a speciális esetben adjunk egy élsúlyozást ami mod 3 különböző. Ez alatt azt értem, hogy egy olyan súlyozás legyártásával próbálkoztunk, ahol két szomszédos csúcs címkéje különbözik mod 3, esetleg az egy fokú rögzített csúcsot kivéve. Erre is az 1-2 eset adott motivációt, mert abban az esetben így is belátható. Mégpedig úgy, hogy vegyünk egy feszítőfát a páros gráfban és gyökereztessük az egy fokú csúcsban v-ben. A v-től való távolság a feszítőfában szintekre osztja a csúcsokat. Azt szeretnénk elérni, hogy minden u csúcsra (a gyökeret leszámítva), a címkéjének paritása megegyezzen a szint paritásával, röviden azért, mert mint látni fogjuk, az így kapott súlyozással egy megengedett $1-2$ élsúlyozást kapunk. Nézzük, ezt hogyan tudjuk elérni.
Legyen a fa mélysége m. Milyen fán kívüli élek lehetnek a gráfban? Csak olyanok amelyek páros szintről páratlanra, és páratlanról párosra mennek, mivel a gráfunkban, csak páros hosszú körök lehetnek. Ezért tűztük ki magunknak az említett célt. A fában minden gyökértől különböző csúcsból felfelé pontosan egy él megy. Az m. szinttől felfelé elindulva a következőt csináljuk: számoljuk össze a lentről beérkező éleken lévő számok összegét (ha egy levél csúcsot nézünk, akkor ez 0 lesz), és ha ennek az összegnek a paritása megegyezik a szint paritásával, akkor a felfelé menő élre 2-est írjunk, egyébként 1-est. Minden más nem fa élre írjunk 2-est. Így el tudjuk érni a kitűzött célt a v gyökércsúcstól eltekintve, mert abból nem megy felfelé él — amit

felhasználva beállíthatnánk az ő paritását. De vegyük észre, hogy ott sem lehet gond, mert v gyerekére illeszkedik még legalább egy él, szóval lehet, hogy v szintjének paritása nem egyezik meg címkéjének paritásával, de ez nem baj, mert $z(v) < z(w)$, ahol w a v gyereke. Tehát a súlyozás, amit az algoritmus ad, egy megengedett 1-2 élsúlyozás. A félév egy részében ezen algoritmus kiterjesztésén dolgoztunk. Az első ötlet ami támadhat, hogy az 1-3 esetben is a 3 lehetséges maradék közül mod 3 csak kettőt használjunk felváltva szintenként, például a 0-ás és 1-es maradékot. De ez sajnos nem érthető el mindig. Ha megengedjük, hogy az egyik szinten például 1-es és 2-es maradék is lehessen míg a másikon csak 0-ás, még az sem elég. Tehát ebből az irányból nem tudtunk adni egy mod 3 különböző megengedett élsúlyozást.

Mod 3 különböző élsúlyozás keresés blokkfelbontás segítségével

Ezután a mod 3 különböző élsúlyozást a blokkfelbontás segítségével próbáltuk megadni. Egy gráf blokkfelbontása a következő: Legyen $e \equiv f$, ha $e = f$ vagy létezik C kör, hogy $e, f \in C$. Ekkor ez egy ekvivalencia reláció, és az osztályokat blokkoknak nevezzük. A B_i blokkokra többek között az igaz, hogy 2-összefüggőek vagy $B_i = K_2$. Emelett a blokkok faszerűen illeszkednek egymáshoz, bármely két blokknak legfeljebb egy közös pontja van, és ha van közös pontjuk akkor az egy elvágó pont. Azért kezdtük el a blokkfelbontásokat vizsgálni, mert a blokkok mivel 2-összefüggőek létezik fülfelbontásuk, és ezen fülfelbontás mentén teveztünk volna súlyt adni az éleknek egy mod 3 különböző súlyozás reményében. Az általános eset ebben a megközelítésben sem jött ki és ezáltal azt gondoljuk, hogy nem is mindig létezik mod 3 különböző élsúlyozás, viszont ezek vizsgálatával a következő állítás kjött:

1.1. Állítás. *Legyen G egy páratlan multi-kaktusz, plusz egy lelógó él. Ekkor G 1-3 élsúlyozható megengedetten.*

Különböző megengedett élsúlyozások közötti kapcsolat

Egy másik megközelítési irány, amire gondoltunk az az, hogyha egy G páros gráf megengedett 1-2 élsúlyozásához letudunk gyártani G-nek egy megengedett 1-3 élsúlyozását, akkor készen vagyunk. Mivel az könnyen látható a páratlan multi-kaktuszok egyik fajta karakterizációjából, hogy ők nem a-b élsúlyozhatóak megengedetten semmilyen a, b-re. Ezért első körben az az ötletünk támadt, hogy ellenőrizzük le fix gráfokra, hogy mennyi különböző megengedett 1-2 illetve 1-3 élsúlyozás van. Mivel ha esetleg azt láttuk volna, hogy ugyannyi a számuk, akkor erősen sejthettük volna, hogy egy tetszőleges 1-2 élsúlyozás egy az egy megfeleltethető egy 1-3 élsúlyozásnak. Az pedig, hogy hány darab megengedett élsúlyozása van egy adott gráfnak többféleképpen is leellenőrizhető. Kitaláltunk egy backtrackinges algoritmust, ami valószínűleg gyorsan kiszámolta volna ezt a számot, de mielőtt implementáltuk volna leellenőriztük kisebb példákra egy könyebben implementálható módszerrel, amely pedig az összes lehetséges (2^m darab) élsúlyozást legyártotta majd leellenőrizte mindre, hogy megengedett-e. Implementálás után azt tapasztaltuk sajnos, hogy egyáltalán nem igaz, hogy ugyanannyi megengedett 1-2 élsúlyozás lenne mint az

1-3 esetben. A 1. táblázatban azt is megfigyelhetjük, hogy az egyik irányban sincsen egyértelmű eltolódás a megengedett élsúyozások mennyiségében.

Eset	Egy 10 csúcsú fa	Egy 12 csúcsú fa	Egy 13 csúcsú gráf
1-2	369	2048	8192
1-3	512	2048	7678
1-5	481	2028	8060

1. táblázat. Amint láthatjuk egyik irányban sincsen egyértelmű eltérés a megengedett élsúlyozások között egy-egy példán megmutatva.

1.4. A 0-1 eset

Másik témakör amin gondolkoztunk, az a páros gráfok 0-1 élsúlyozása. Ez az eset azért érdekesebb a többi a,b esetétől mert itt a programmal azt tapasztaltuk, hogy a páratlan multi-kaktuszokon kívül rengeteg másik gráf sem 0-1 tulajdonságú. Kétfelé indulhattunk el tehát: megpróbálunk egy hasonló karakterizációt adni, mint amit az 1-2 esetben láttunk, vagy belátjuk, hogy ez a feladat már a páros gráfokon is nehéz. Itt egyelőre azt állapítottuk meg, hogy az eddigi nehézségi bizonyítások, amiket csináltunk a témakörben nem terjeszhetőek ki nagyon egyszerűen. Mivel például az a, b és $0, 1$ esetre adott redukciónk általános gráfokon erősen támaszkodnak a páratlan körök speciális tulajdonságaira ezekben a feladatokban. Egy érdekes különbséget az általános a-b és a 0-1 eset között a következő állítás fogalmazza meg:

1.2. Állítás. *Nem létezhet olyan H páros gráf, amelynek van egy olyan e levél éle, hogy H minden megengedett 1-2 élsúlyozásban a súlya 1. Következésképpen olyan sem lehet aminek pedig 2.*

Ez az állítás abból a tényből bizonyítható be, hogy a nem 1-2 tulajdonságú gráfok a páratlan multi-kaktuszonk. Tehát a sejtésünk szerint ez az állítás minden a, b-re is fennáll, ha egyik sem 0. Viszont ez az állítás egyértelműen nem igaz a 0-1 estre, mivel itt vegyünk például egy kettő hosszú utat. Ekkor ez egyrészt egy páros gráf, másrészt egyetlen egy megengedett 0-1 súlyozása van, az pedig ha mind a kettő él 1-es súlyt kap. Tehát a 0-1 esetben speciális esetekben tudunk kényszeríteni 1-es súly előírást. Ez ösztönözhet arra, hogy egy visszavezetést az elkezdett élsúlyozásos változatról próbáljunk adni, amiről az előző félévben láttuk be, hogy NP-teljes. Mivel az él előírás és a súly kényszerítés között sok hasonlóság van, viszont a fokszám előírt részgráf feladatra adott redukció sem alakítható át egyszerűen erre a feladatra.

1.5. Terv a következő félévre

Amint a legutolsó bekezdésben taglaltuk a páros gráfok 0-1 élsúlyozása érdekes témakör. Egyre jobban afelé hajlunk, hogy eldönteni, hogy egy páros gráf 0-1 élsúlyozható-e megengedetten az NP-teljes. Elsősorban egy redukció kidolgozásán fogunk dolgozni.

Emellett csak részeredményeink születtek az általános a, b esetre is páros gráfok esetében. A sejtésünk továbbra is fennáll, hogy minden a, b-re, amikor egyik sem 0 teljesül, hogy a nem a-b tulajdonságú páros gráfok pontosan a páratlan multi-kaktuszok. Amint fentebb láttuk az eddigiektől ehhez is alapjaiban más megközelítési módszerrel kell majd hozzáálljunk.

Továbbá ebből a témából egy cikk is fog készülni, aminek a fordítását és leírását már ebben a félévben megkezdtük és a továbbiakban is folytatni fogjuk.

Hivatkozások

[1] Dudek, A., & Wajc, D. (2011). *On the complexity of vertex-coloring edge-weightings.* Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 13(3), 45-50.

[2] Thomassen, C., Wu, Y., & Zhang, C. Q. (2016). *The 3-flow conjecture, factors modulo k, and the 1-2-3-conjecture.* Journal of Combinatorial Theory, Series B, 121, 308-325.

[3] Dezső, B., Jüttner, A.& Kovács, P. (2011). *LEMON – an Open Source C++ Graph Template Library.* Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 264(5), 23-45.

[4] IBM (2017) IBM ILOG CPLEX 12.7 *User's Manual* (IBM ILOG CPLEX Division, Incline Village, NV).

[5] https://hpc.iig.elte.hu