

Járványterjedés modellezése differenciálegyenletekkel

Témavezető: Nagy Noémi

Andó-Kinorányi Dóra

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Önálló Projektmunka I.

2022.05.20.



Járványterjedési modellek vizsgálata

- Hálózati modellek
- N csúcsú gráf
- Csúcsok lehetséges állapotai: $\{m_1, \dots, m_M\}$
- Állapottér: $S = \{\underline{a} = (a_1, \dots, a_N) \mid a_n \in \{m_1, \dots, m_M\}, n = 1, \dots, N\}$
- csúcs állapotváltozását egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó írja le
- annak a valószínűsége, hogy δt idő alatt $m_i \rightarrow m_j$ állapotváltozás bekövetkezik $1 - e^{-f_{ij}\delta t}$, ahol $f_{ij} \in \mathbb{R}$ jelöli az állapotváltozás rátáját.
- A folyamat egy Markov-lánc S állapothalmazzal
- Az alapegyenletek állandó együtthatós, lineáris differenciálegyenlet-rendszert alkotnak - 2^N egyenlet.
- Változói: $x_{\underline{a}}(t) = P(X(t) = \underline{a}) \forall \underline{a} \in S$.

- A csúcsok 2 lehetséges állapotban lehetnek
- S : egészséges, I : beteg
- Az állapotok között az $S \rightarrow I$ és az $I \rightarrow S$ átmenet lehetséges
- Gyógyulási ráta: $\gamma > 0$
- Fertőzési ráta: $\tau > 0$

Alapegyenletek 4 csúcsú teljes gráfon

$$\dot{x}_{SSSS}(t) = \gamma (x_{ISSS}(t) + x_{SISS}(t) + x_{SSIS}(t) + x_{SSSI}(t))$$

$$\dot{x}_{ISSS}(t) = \gamma (x_{IISS}(t) + x_{ISIS}(t) + x_{ISSI}(t)) - (3\tau + \gamma)x_{ISSS}(t)$$

$$\dot{x}_{SISS}(t) = \gamma (x_{IISS}(t) + x_{SIIS}(t) + x_{SISI}(t)) - (3\tau + \gamma)x_{SISS}(t)$$

$$\dot{x}_{SSIS}(t) = \gamma (x_{ISIS}(t) + x_{SIIS}(t) + x_{SSII}(t)) - (3\tau + \gamma)x_{SSIS}(t)$$

$$\dot{x}_{SSSI}(t) = \gamma (x_{ISSI}(t) + x_{SISI}(t) + x_{SSII}(t)) - (3\tau + \gamma)x_{SSSI}(t)$$

$$\dot{x}_{IISS}(t) = \gamma (x_{IIIS}(t) + x_{IISI}(t)) + \tau (x_{SISS}(t) + x_{ISSS}(t)) - (4\tau + 2\gamma)x_{IISS}(t)$$

$$\dot{x}_{ISIS}(t) = \gamma (x_{IIIS}(t) + x_{IISII}(t)) + \tau (x_{SSIS}(t) + x_{ISSS}(t)) - (4\tau + 2\gamma)x_{ISIS}(t)$$

$$\dot{x}_{ISSI}(t) = \gamma (x_{IIIS}(t) + x_{IISII}(t)) + \tau (x_{SSSI}(t) + x_{ISSS}(t)) - (4\tau + 2\gamma)x_{ISSI}(t)$$

$$\dot{x}_{SIIS}(t) = \gamma (x_{IIIS}(t) + x_{SIII}(t)) + \tau (x_{SSIS}(t) + x_{SISS}(t)) - (4\tau + 2\gamma)x_{SIIS}(t)$$

$$\dot{x}_{SISI}(t) = \gamma (x_{IIIS}(t) + x_{SIII}(t)) + \tau (x_{SSSI}(t) + x_{SISS}(t)) - (4\tau + 2\gamma)x_{SISI}(t)$$

$$\dot{x}_{SSII}(t) = \gamma (x_{IISII}(t) + x_{SIII}(t)) + \tau (x_{SSSI}(t) + x_{SSIS}(t)) - (4\tau + 2\gamma)x_{SSII}(t)$$

$$\dot{x}_{SIII}(t) = \gamma x_{IIIII}(t) + 2\tau (x_{SSII}(t) + x_{SISI}(t) + x_{SIIS}(t)) - (3\tau + 3\gamma)x_{SIII}(t)$$

$$\dot{x}_{IISII}(t) = \gamma x_{IIIII}(t) + 2\tau (x_{SSII}(t) + x_{ISSI}(t) + x_{ISIS}(t)) - (3\tau + 3\gamma)x_{IISII}(t)$$

$$\dot{x}_{IISI}(t) = \gamma x_{IIIII}(t) + 2\tau (x_{SISI}(t) + x_{ISSI}(t) + x_{IISS}(t)) - (3\tau + 3\gamma)x_{IISI}(t)$$

$$\dot{x}_{IIIS}(t) = \gamma x_{IIIII}(t) + 2\tau (x_{SIIS}(t) + x_{ISIS}(t) + x_{IISS}(t)) - (3\tau + 3\gamma)x_{IIIS}(t)$$

$$\dot{x}_{IIII}(t) = 3\tau (x_{SIII}(t) + x_{IISII}(t) + x_{IISI}(t)) + x_{IIIS}(t) - 4\gamma x_{IIII}(t)$$

Alapegyenletek 4 csúcsú körgráfon

$$\dot{x}_{SSSS}(t) = \gamma (x_{ISSS}(t) + x_{SISS}(t) + x_{SSIS}(t) + x_{SSSI}(t))$$

$$\dot{x}_{ISSS}(t) = \gamma (x_{IISS}(t) + x_{ISIS}(t) + x_{ISSI}(t)) - (\gamma + 2\tau)x_{ISSS}(t)$$

$$\dot{x}_{SISS}(t) = \gamma (x_{IISS}(t) + x_{SIIS}(t) + x_{SISI}(t)) - (\gamma + 2\tau)x_{SISS}(t)$$

$$\dot{x}_{SSIS}(t) = \gamma (x_{ISIS}(t) + x_{SIIS}(t) + x_{SSII}(t)) - (\gamma + 2\tau)x_{SSIS}(t)$$

$$\dot{x}_{SSSI}(t) = \gamma (x_{ISSI}(t) + x_{SISI}(t) + x_{SSII}(t)) - (\gamma + 2\tau)x_{SSSI}(t)$$

$$\dot{x}_{IISS}(t) = \gamma (x_{IIIS}(t) + x_{IISI}(t)) + \tau (x_{ISSS}(t) + x_{SISS}(t)) - (2\gamma + 2\tau)x_{IISS}(t)$$

$$\dot{x}_{ISIS}(t) = \gamma (x_{IIIS}(t) + x_{IISII}(t)) - (2\gamma + 4\tau)x_{ISIS}(t)$$

$$\dot{x}_{IISSI}(t) = \gamma (x_{IISI}(t) + x_{IISII}(t)) + \tau (x_{SSSI}(t) + x_{ISSS}(t)) - (2\gamma + 2\tau)x_{IISSI}(t)$$

$$\dot{x}_{SIIS}(t) = \gamma (x_{IIIS}(t) + x_{SIII}(t)) + \tau (x_{SSIS}(t) + x_{SISS}(t)) - (2\gamma + 2\tau)x_{SIIS}(t)$$

$$\dot{x}_{SISI}(t) = \gamma (x_{IISI}(t) + x_{SIII}(t)) - (2\gamma + 4\tau)x_{SISI}(t)$$

$$\dot{x}_{SSII}(t) = \gamma (x_{IISII}(t) + x_{SIII}(t)) + \tau (x_{SSSI}(t) + x_{SSIS}(t)) - (2\gamma + 2\tau)x_{SSII}(t)$$

$$\dot{x}_{SIII}(t) = \gamma x_{IIIII}(t) + \tau (x_{SSII}(t) + x_{SIIS}(t) + 2x_{SISI}(t)) - (3\gamma + 2\tau)x_{SIII}(t)$$

$$\dot{x}_{IISII}(t) = \gamma x_{IIIII}(t) + \tau (x_{SSII}(t) + 2x_{ISIS}(t) + x_{ISSI}(t)) - (3\gamma + 2\tau)x_{IISII}(t)$$

$$\dot{x}_{IISI}(t) = \gamma x_{IIIII}(t) + \tau (x_{IISSI}(t) + 2x_{SISI}(t) + x_{IISS}(t)) - (3\gamma + 2\tau)x_{IISI}(t)$$

$$\dot{x}_{IIIS}(t) = \gamma x_{IIIII}(t) + \tau (2x_{ISIS}(t) + x_{SIIS}(t) + x_{IISS}(t)) - (3\gamma + 2\tau)x_{IIIS}(t)$$

$$\dot{x}_{IIIII}(t) = 2\tau (x_{SIII}(t) + x_{IISII}(t) + x_{IISI}(t) + x_{IIIS}(t)) - 4\gamma x_{IIIII}(t)$$

Alacsony dimenziós modellek

A csúcszám növelésével az alapegyenletek száma exponenciálisan nő.

Jelölések: $[I](t)$: a t időpontban átlagosan hány fertőzött van,

$[SI](t)$: SI élek számának várható értékét a t időpontban.

mean-field

$$[\dot{I}](t) = \tau[SI](t) - \gamma[I](t)$$

Mivel $[SI]$ és $[I]$ változó is ismeretlen, ezért az egyenlet nem megoldható.

Becslés: $[SI] \sim \frac{n}{N-1}[I](N - [I])$

A következő közelítő differenciálegyenletet kapjuk:

$$[\dot{I}](t) = \tau \frac{n}{N-1}[I](N - [I]) - \gamma[I](t)$$

A NIMFA és az egyszerű átlagoló modell

Jelölések: $x_i(t)$: annak a valószínűsége, hogy az i -edik csúcs a t időpontban beteg, $W = ((w_{ij}))_{i,j=1,\dots,N}$: hálózat adjacenciamátrixa

NIMFA

$$\dot{x}_i = \tau \sum_{j=1}^N w_{ij}(1 - x_i)x_j - \gamma x_i, i = 1, \dots, N$$

Betegek átlagos száma: $I(t) = x_1(t) + \dots + x_N(t)$

$y(t) \approx x_i(t), i = 1, \dots, N.$

Jelölje n az átlagos fokszámot, ekkor n becslés a W mátrix sorösszegeire.

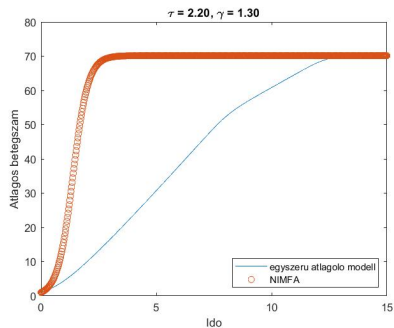
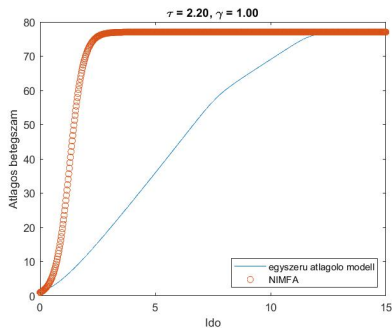
Egyszerű átlagoló modell

$$\dot{y} = \tau n(1 - y)y - \gamma y$$

Betegek átlagos száma: $\bar{I}(t) = N \cdot y(t)$

A NIMFA összehasonlítása az egyszerű átlagoló modellel I.

Vizsgált gráf: $N = 100$, körgráf



A NIMFA összehasonlítása az egyszerű átlagoló modellel II.

