Újszerű párosítás feladatok

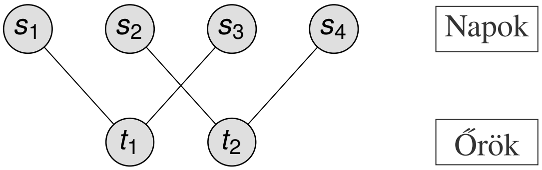
Tóth Sára Hanna

Témavezető:
Madarasi Péter

A d-távolságú párosítás feladat

Adottak $s_1, \ldots, s_n$ egymást követő egész napos események, és $t_1, \ldots, t_k$ őrök. Minden eseményhez adott az arra beosztható őrök listája.

Cél: rendeljünk minden eseményhez egy őrt úgy, hogy egyik őr sincs egynél többször beosztva semelyik d egymást követő napon!



A d-távolságú párosítás feladat

Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf, melyre $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, és egy $d \in \mathbb{Z}_+$ szám.

Egy $M \subseteq E$ élhalmazt **d-távolságú párosításnak** nevezünk, ha minden $s \in S$ csúcs foka M-ben legfeljebb 1, és minden $t \in T$-re, ha $s_i t, s_j t \in M$, akkor $|i - j| \geq d$.

Optimalizálási feladat: Adott $w : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény mellett keressünk egy maximális súlyú d-távolságú párosítást.

Egy általánosítás

$\mathcal{I}$: S-beli d-hosszú intervallumok halmaza.

Adott: $g : T \times \mathcal{I} \to \mathbb{Z}_+$ függvény.

Feladat: Olyan maximális súlyú élhalmazt keresünk, amelyben minden $t \in T$-nek az $I \in \mathcal{I}$ intervallumból legfeljebb $g(t, I)$ darab szomszédja lehet.

Az eredeti d-távolságú párosítás feladat: $g \equiv 1$ eset.

Tétel

Ha g monoton, akkor adható $\left(2 - \frac{1}{d}\right)$-közelítő algoritmus.

Kicsit sértő megoldások

Feladat: Olyan élhalmazt keresni, amely legalább olyan súlyos, mint az optimális d-távolságú párosítás, cserébe kicsit sértheti a feltételeket.

Megközelítések:

1) Minden $t \in T$-nek minden d-hosszú intervallumban legfeljebb 2 szomszédja lehet.
2) Minden $t \in T$-re a t bármely 2 szomszédjának a távolsága legalább d', valamely $d' < d$ számra.

1. megközelítés

Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf, melyre $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, egy $d \in \mathbb{Z}_+$ szám, és egy $w : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény.

Olyan élhalmazt keresünk, amely

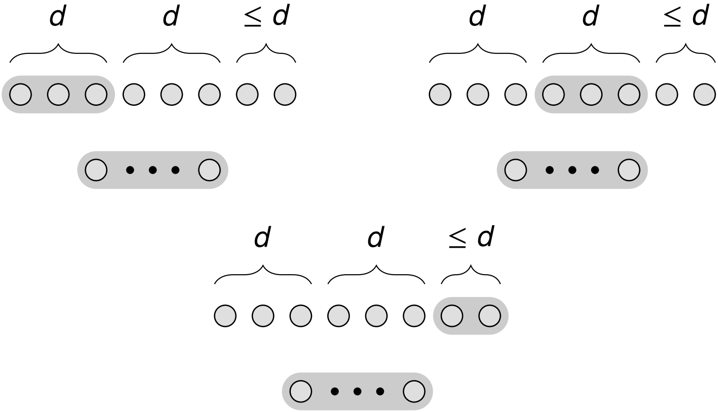
- legalább olyan súlyos, mint a maximális súlyú d-távolságú párosítás,
- minden $s \in S$ foka legfeljebb 1,
- **minden $t \in T$-nek minden d-hosszú intervallumban legfeljebb 2 szomszédja lehet.**

Tétel

Ilyen élhalmazt tudunk találni polinom időben.

1. megközelítés

Keressünk maximális súlyú párosításokat a feszített részgráfokon, ezek uniója jó lesz.



2. megközelítés

Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf, melyre $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, egy $d \in \mathbb{Z}_+$ szám, és egy $w : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény.

Olyan élhalmazt keresünk, amely

- legalább olyan súlyos, mint a maximális súlyú d-távolságú párosítás,
- minden $s \in S$ foka legfeljebb 1,
- **minden $t \in T$-re a t bármely 2 szomszédjának a távolsága legalább d', valamely $d' < d$ számra.**

Tétel

Ha $1 \leq c < 2$, akkor NP-nehéz olyan $\frac{d}{c}$-távolságú párosítást találni, amely legalább olyan súlyos, mint a maximális súlyú d-távolságú párosítás.

2. megközelítés

Tétel

Ha $1 \leq c < 2$, akkor NP-nehéz olyan $\frac{d}{c}$-távolságú párosítást találni, amely legalább olyan súlyos, mint a maximális súlyú d-távolságú párosítás.

A bizonyítás lényege:

Tétel

A teljes d-távolságú párosítás feladat már akkor is NP-nehéz, ha G-ben nincsenek $(d-1), (d-2), \ldots, \frac{d}{c}$-széles ($T$-ben 2-fokú) cseresznyék $(1 \leq c < 2)$.

Ekkor minden d'-távolságú párosítás ($\frac{d}{c} \leq d' < d$) egyben d-távolságú párosítás is.

Nyitott kérdések

- Kicsit sértő megoldások:
  - $d' \leq \frac{d}{2}$-re d'-távolságú párosítás
  - fokszámkorlát sértés: S-ben 1-nél valamivel nagyobb fokokat is megengedünk
  - egyszerre sérthetjük a fokszám- és a távolságfeltételeket
- Mi az egészértékűségi hézag pontos értéke?
- Adjunk jobb approximációs algoritmust speciális esetekben.
- Minimalizáljuk az őrök számát (szeretnénk minél többet kirúgni).

Köszönöm a figyelmet!