Párhuzamosított idődiszkretizáló módszerek

MGRIT

Kupás Vendel Péter

Témavezető
Dr. Fekete Imre

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2022. május 19.

Tartalom

Idő-párhuzamosított numerikus módszerek

- Különböző időpontokhoz tartozó értékeket számolunk ki egyszerre.
- Belövéses módszerek
- MGRIT

Egylépéses módszerek

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)), \quad t \in [0, T] \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

- Legyen $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$ a $[0, T]$ intervallum δt lépésközű felosztása.

$$u(0) = u_0$$
$$u_i = \Phi_i(u_{i-1}) + g_i, \quad i = 1,2,..,N$$

- Ha f lineáris és $\Phi_i(u_{i-1}) = \Phi u_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, N)$, akkor a módszer $Au = g$ alakba írható, ahol

$$A = \begin{bmatrix} I & & & \\ -\Phi & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\Phi & I \end{bmatrix}$$

Többrácsos módszerek

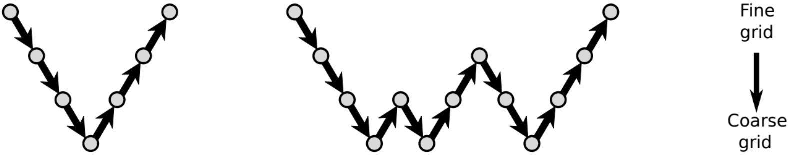
- Iteratív módszer
- Klasszikus elliptikus parciális differenciálegyenletek.
- Minden Ω_l, $l = 1, \dots, L$ rácshoz tartozik egy $A_l u = g_l$ lineáris egyenletrendszer.

1. Algorithm 2-rácsos MG az $A_h u_h = g_h$ megoldására

1: Elősimítás a finom hálón $u_h = S(u_h, g_h)$
2: Reziduális számítása: $r_h = g_h - A_h u_h$
3: Leszűkítés: $r_H = R r_h$
4: Az $A_H e_H = r_H$ megolása
5: Prolongálás: $u_h = u_h + P e_H$
6: Utósimítás a finom hálón: $u_h = S(u_h, g_h)$

Többrácsos módszer

- Kettőnél több rács esetén a 4. pontban lévő egyenletrendszert nem direkt, hanem rekurzívan oldjuk meg.



MG V-ciklus (bal) és F-ciklus (jobb)

- Tér-idő MG: időfüggő parciális differenciálegyenlet

Parareal

- Iteratív, idő-párhuzamosítható, kezdeti érték problémára alkalmazható.
- 2 felosztást és 2 egylépéses módszert használ
- Lineáris jobb oldal esetén a korrekciós séma:

$$u_\Delta^{k+1} = u_\Delta^k + B_\Delta^{-1}(g_\Delta - A_\Delta u_\Delta^k), \quad k = 0,1,\ldots$$

2. Algorithm Parareal kétrácsos MG módszerként

1: Az $Au = g$ rendszer relaxálása F-relaxációval
2: $r_\Delta = R_I(g - Au^k)$
3: Oldjuk meg a $B_\Delta v = r_\Delta$ rendszert
4: $u^{k+1} = u^k + Pv$

MGRIT

- Vegyük az Ω_l, $l = 0{,}1, \ldots, L$ felosztásokat a δt, $m\delta t$, stb lépésközzel és minden felosztáson használjunk egy egylépéses módszert. Jelölje $A_l u^{(l)} = g^{(l)}$ az Ω_l-hez tartozó lineáris egyenletrendszert, ahol A_l mátrixot a Φ_l mátrix határozza meg.

3. Algorithm MGRIT(l)

if l a legdurvább szint **then**
    Oldjuk meg az $A_L u^{(L)} = g^{(L)}$ rendszert
else
    Az $A_l u^{(l)} = g^{(l)}$ rendszer relaxálása FCF-relaxációval
    Reziduális számítása és szűkítése injekcióval: $g^{(l+1)} = R_l(g^{(l)} - A_l u^{(l)})$
    Megoldás a következő szinten: $MGRIT(l+1)$
    $u^{(l)} = u^{(l)} + Pu^{(l+1)}$
end if

4. Algorithm MGRIT-FAS(l)

if l a legdurvább szint **then**
    Oldjuk meg az $A_L(u^{(L)}) = A_L(R_l(u^{(L-1)})) + g^{(L)}$ rendszert
else
    Az $A_l(u^{(l)}) = g^{(l)}$ rendszer relaxálása FCF-relaxációval
    Reziduális számítása és szűkítése injekcióval: $g^{(l+1)} = R_l(g^{(l)} - A_l(u^{(l)}))$
    Megoldás a következő szinten: $MGRIT(l+1)$.
    $e^{(l+1)} = u^{(l+1)} - u^{(l)}$
    $u^{(l)} = u^{(l)} + P' e^{(l+1)}$
    Az $A_l(u^{(l)}) = g^{(l)}$ rendszer relaxálása F-relaxációval
end if

- **Variánsok:** • Durvítás mértéke • Egylépéses módszer • Rekurzív hívások sorrendje • Elő- és Utósimító eljárások

Model probléma

$$\partial_t u(t,x) - \kappa \Delta u(t,x) = b(t,x), \quad x \in \Omega = [0,\pi]^d, \quad t \in (0,T], \quad \kappa > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$
$$u(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T]$$

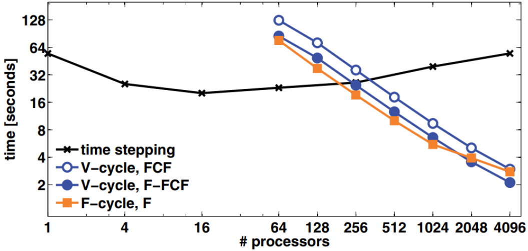


Fig. 9. *Time to solve* Implicit2D($T = \pi^2$) *on a* $129^2 \times 16{,}385$ *space-time grid using sequential time stepping and three MGRIT variants.*

A futási idő a processzorszám tekintetében az egyes eljárásokra nézve [1].

További tervek

- Az algoritmus kipróbálása különböző feladatokon.
  - XBraid
  - HPC-s kolléga segítségével a Sandia Nemzeti Laboratóriumban
- Alkalmazása neurális differenciálegyenletek veszteségfüggvényeinek optimalizálásában.

Hivatkozások

- R. D. Falgout, S. Friedhoff, Tz. V. Kolev, S. P. MacLachlan, and J. B. Schroder: *Parallel Time Integration with Multigrid*, SIAM J. Sci. Comput., 36 (2014), pp.C635-C661. LLNL-JRNL-645325.
- Horváth Róbert, Izsák Ferenc, Karátson Kános: *Parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei számítógépes alkalmazásokkal*, Elektronikus jegyzet, 2013
- J.-L. Lions, Y. Maday, and G. Turnici: *A parareal in time discretization of PDEs*, C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 332 (2001), pp. 661-668.
- XBraid: Parallel multigrid in time. http://llnl.gov/casc/xbraid