Önálló projekt beszámoló

Encz Koppány

2022 Május

Bevezetés

Az előző félévben elkezdett két téma közül a "minimális gap vágásokban" címszavú téma került feldolgozásra az idei félévi kutatómunka során. Ismétlésképpen, a kiinduló probléma a következő: vegyünk egy gráfot n csúcson $2(n-1)$ éllel, amely előáll 2 éldiszjunkt feszítőfa uniójaként, és számozzuk meg az éleit az $1, 2, \ldots, 2(n-1)$ számokkal. Az a sejtés, hogy a számozást mindig meg tudjuk úgy csinálni, hogy a gráf valamennyi vágásában van 2 szomszédos számmal címkézett él.

Az egyik legegyszerűbb ide kapcsolódó eredmény a következő:

Állítás. Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, amely előáll két diszjunkt feszítőfa uniójaként. EKkor az élei megszámozhatók az $1, 2, \ldots, 2(n-2)$ számokkal úgy, hogy G minden köre tartalmaz szomszédos címkéjű élpárt.

A bizonyítás a következő állításra támaszkodik, amely egy konstruktív karakterizációját adja a két feszítőfa uniójaként előálló gráfoknak:

Lemma. Egy G gráf előáll 2 diszjunkt feszítőfa uniójaként pontosan akkor, ha az alábbi 2 fajta lépéssel megkapható az 1 pontú üres gráfból:

- felveszünk egy új pontot, majd összekötjük 2 korábbi (nem feltétlenül különböző) ponttal
- egy uv élet felosztunk egy új w ponttal, és w-t összekötjük egy korábbi w' ponttal

A lemma segítségével egy indukciós bizonyítást lehet adni a fenti állításra. A bizonyítás során kiderül, hogy egy erősebb alakja is igaz az állításnak:

Állítás. Legyen $G = (V, F_1 \cup F_2)$ egy gráf, ahol F_1 és F_2 is feszítőfát alkot V-n. Ekkor meg tudjuk számozni az éleket az $1, 2, \ldots, 2(n-1)$ számokkal, hogy minden kör tartalmazzon szomszédos címkéjű élpárt, illetve F_1 élei páratlan, F_2 élei páros számot kapjanak címkének.

Vagyis az eredeti feltétel mellett még azt is kikötjük, hogy a két rögzített feszítőfa élei páros/páratlan számokat kapjanak.

Az előző félévben ezen témakör feldolgozása egy sejtés megfogalmazásával zárult, amely egy tetszőleges gráfban kapcsolta össze a vágásokban előforduló legnagyobb "gap"-et (a vágásban szereplő élpárok címkéi között szereplő minimális különbség) azon élek minimális számával, amely éleket hozzávéve a gráfban lesz két éldiszjunkt feszítőfa. Az idei félévben a hangsúly inkább arra került, hogy olyan gráfosztályokat keressünk, melyekre az eredetihez hasonló állítás értelmes módon megfogalmazható: álljon elő két részgráf uniójaként, melyek egy kívánt struktúrával rendelkeznek, majd adjunk egy élszámozást, amely minden olyan részgráfban tartalmaz szonszédos sorszámú élpárt, amelyek nem tesznek eleget a kívánt tulajdonságnak (nyilván elég megkövetelni ezt a minimális részgráfokról, melyek nem tesznek eleget a feltételnek). Hasonlóan a fentiekhez, az ilyen típusú állításoknak egy erősebb verziója is megfogalmazható: a korábbi kikötések mellett azt is megkövetteljük, hogy a két rögzített részgráf közül az egyik tartalmazza a páros, a másik a páratlan sorszámú éleket. Különösen olyan gráftípusok bizonyultak ígéretesnek, amelyek hasonlóan a két feszítőfa uniójaként előálló gráfokhoz, rendelkeznek egy konstruktív karakterizációval.

(k,l)-pontos gráfok

Vegyük észre, hogy a két fa uniójaként előálló gráfokat a következő módon is karakterizálhatjuk:

Állítás. $G = (V, E)$ két feszítőfa uniója pontosan akkor, ha

- $\forall X \subseteq V: \; i(X) \leq 2|X| - 2$
- $|E| = 2|V| - 2$

Továbbá hasonló megfogalmazással karakterizálhatjuk a fákat is:

Állítás. $G = (V, E)$ fa pontosan akkor, ha

- $\forall X \subseteq V: \; i(X) \leq |X| - 1$
- $|E| = |V| - 1$

Ez a két egyszerű észrevétel motiválja az alábbi definíciókat:

Definíció. $G = (V, E)$ (k, l)-ritka, ha $\forall X \subseteq V: \; i(X) \leq k|X| - l$.

Definíció. $G = (V, E)$ (k, l)-pontos (vagy (k, l)-szoros), ha

- $\forall X \subseteq V: \; i(X) \leq k|X| - l$
- $|E| = k|V| - l$

Ezen definíciók segítségével a fenti két állítás úgy is megfogalmazható, hogy a fák az $(1, 1)$-pontos gráfok, míg a két feszítőfa uniójaként előálló gráfok a $(2, 2)$-pontos gráfok.

Egy ismert tétel a következő:

Tétel. G $(2k, 2l)$-pontos $\iff$ G 2 darab (k, l)-pontos uniója.

A fenti tétel lehetővé teszi, hogy mefogalmazzuk a gap-es sejtés egy változatát:

Sejtés. Legyen $G = (V, E)$ 2 darab (k, l)-pontos gráf uniója V-n. Ekkor létezik olyan számozása az éleknek az $1, 2, \ldots, k|V| - l$ számokkal, hogy minden nem (k, l)-ritka részgráf tartalmaz szomszédos sorszámú élpárt.

Ugyancsak megfogalmazható egy erősebb verzió is:

Sejtés. Legyen $G = (V, E)$ 2 darab (k, l)-pontos gráf uniója V-n. Ekkor létezik olyan számozása az éleknek az $1, 2, \ldots, k|V| - l$ számokkal, hogy minden nem (k, l)-ritka részgráf tartalmaz szomszédos sorszámú élpárt, és az egyik (k, l)-pontos gráf élei kapják a páros sorszámú éleket, a másik pedig a páratlan sorszámúakat.

A félév nagyobb része ennek a sejtésnek, különösen néhány speciális esetnek a vizsgálatával telt. Az első érdekes esetet a $(2, 0)$-szoros gráfok szolgáltatják. Ekkor G két darab $(1, 0)$-szoros gráf uniója. Egy $(1, 0)$-szoros gráf egy feszítő pszeudo-erdő, ahol egy pszeudo-erdő egy olyan gráf, amelynek minden komponensében legfeljebb 1 kör van (vagyis úgy kaphatók meg a komponensei, hogy egy fához hozzáveszünk egy élt). Az ilyen gráfok rendelkeznek konstruktív karakterizációval:

Állítás. $G = (V, E)$ pontosan akkor $(2, 0)$-pontos, ha előáll a következő lépések sorozatával az egypontú üres gráfból:

- Egy új v csúcs felvétele, majd összekötése két régi (nem feltétlenül különböző) u, w ponttal
- Egy új v csúcs felvétele, majd összekötése egy régi u ponttal, és vv hurokél hozzáadása
- Egy új v csúcs hozzávétele, majd két darab vv hurokél felvétele
- Egy uv él felosztása egy új w ponttal, majd w összekötése egy régi t ponttal
- Egy uv él két végpontját összekötjük egy új w ponttal, majd ww hurokél behúzása
- Egy uv és egy $u'v'$ élpár összecsippentése egy új w ponttal

A $(2, 2)$-pontos gráfok esetéhez hasonlóan a legtöbb esetben itt is könnyen megadható inukcióval egy számozás, amely kielégíti a feltételeket. Az egyetlen problémát a 6 féle lépés közül az utolsó jelenti. Ha a gráfban van harmadfokú pont, akkor az első 5 féle lépés közül tudunk választani az indukció során, ezekre könnyen ellenőrizhető módon működik a visszalépés. Ha nincs harmadfokú pont, akkor a gráf 4-reguláris ($|E| = 2|V|$). Ekkor egy Euler-séta mentén haladva jó számozást kapunk. Tehát $(2,0)$-szoros gráfokra igaz a sejtés gyenge alakja: van olyan élszámozás, hogy minden nem $(1,0)$-ritka gráf tartalmaz szomszédos sorszámú élpárt (egy gráf nem $(1,0)$-ritka pontosan akkor, ha legalább 2 kört tartalmaz).

A kutatás további szakaszában matroidelméleti fogalmakat felhasználva vizsgálódtunk. Ehhez a motivációt a következő jelenség adja: egy G gráfhoz vegyünk fel egy H páros gráfot, melynek egyik csúcsosztálya G csúcsainak, másik csúcsosztálya G éleinek felel meg. Egy $e = uv$ élnek megfelelő csúcs legyen összekötve az u és v csúcsoknak megfelelő H-csúcsokkal. Ekkor $E(G)$-nek egy E' élhalmaza pontosan akkor pszeudo-erdő, ha van olyan irányítása, amelyben minden pont befoka legfeljebb 1. Ez H-ban megfelel egy E'-beli éleket fedő párosításnak. Ezzel tehát G-hez hozzárendeltünk egy transzverzális matroidot, amely SBO.

Definíció. Legyen $\mathcal{M}$ egy matroid, amelynek alaphalmaza a diszjunkt B_1 és B_2 bázisok uniója. Ekkor $\mathcal{M}$ SBO (Strongly Base Orderable), ha $\exists\varphi : B_1 \to B_2$ bijekció: $\forall x \in B_1 : B_1 - x + \varphi(x)$ bázis.

Az $(1,0)$-pontos halmazokra visszatérve, legyenek adottak a G_1 és G_2 $(1,0)$-szoros halmazok, amelyek uniója G. Ekkor a transzverzális matroidban egy B_1 és B_2 bázis tartozik hozzájuk, melyek diszjunkt uniója a matroid alaphalmaza. Gyártsuk le a következő páros G' segédgráfot: az egyik csúcsosztály B_1 elemei, a másik csúcsosztály B_2 elemei legyenek, és köztük minden élt húzzunk be. A cél megadni egy olyan Hamilton-utat G'-ben, hogy a matroid minden köre feszítsen élt ebben az útban. Ekkor ugyanis az út mentén számozva a matroid elemeit minden körben lesz egymás melletti szám, azaz minden G-beli (minimális) nem $(1,0)$-ritka gráfban lesz szomszédos számot kapott élpár. Az SBO-tulajdonság miatt G'-ben létezik egy teljes párosítás. Ha ezt tetszőleges módon felfűzzük egy G'-beli Hamilton-útra, akkor az kielégíti a feltételeket: egy tetszőleges körnek kell tartalmazni legalább az egyik teljes párosítás-beli él mindkét végpontját (és így az útból két szomszédos elemet), különben az SBO-tulajdonság miatt független lenne.

A fenti gondolatmenet bizonyítja tehát, hogy $(2,0)$-szoros gráfokra az erős sejtés is igaz. Az indoklás általánosítható tetszőleges gráfokra, amelyek két (k,l)-szoros gráf uniójaként állnak elő, ahol $0 \le l \le k$; felhasználva a következő állítást:

Állítás. $G(k,l)$-szoros $\iff$ $(k-l)$ darab $(1,0)$-szoros és l darab $(1,1)$-szoros uniója.

valamint a feszítőfák uniójára és a $(2,0)$-szoros gráfokra adott fenti bizonyítást.

A két (k,l)-szoros gráfok uniójaként előálló gráfok esetéből továbbra is bizonyításra vár a $k+1 \le l \le 2k-1$ esetre vonatkozó sejtés (az $l \ge 2k$ eset érdektelen, mert ekkor a gráfban nincs él). Külön kiemelendő speciális esetként a $(2,3)$-szoros gráfok, azaz a minimálisan merev gráfok esete.

Split és nagykörű matroidok

Az előző fejezetben felvetett matroidelméleti konstrukció alapján a sejtést általánosabb feltételek között is megfogalmazhatjuk:

Sejtés. Legyen az $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{B})$ matroid a diszjunkt B_1 és B_2 bázisok uniója. Ekkor az $\mathcal{S}$ alaphalmaz elemeit megszámozhatjuk az $1, 2, \ldots, |\mathcal{S}|$ számokkal úgy, hogy a matroid minden köre tartalmaz szomszédos sorszámú elemeket (a sejtés erős alakja azt is megköveteli, hogy B_1 elemei kapják a páros, B_2 elemei pedig a páratlan sorszámokat).

Az eddigiekből következik, hogy a fenti sejtés igaz grafikus, illetve SBO-matroidokra is. A félév során a sejtést megvizsgáltuk további matroidosztályokra is.

Definíció. Az $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, r)$ matroid nagykörű, ha minden kör mérete $r(\mathcal{M})$

Ha $\mathcal{M}$ nagykörű, és $\mathcal{S} = B_1 \cup B_2$ két bázis diszjunkt uniója, akkor indukcióval megadható egy olyan sorbarendezése B_1 és B_2 elemeinek, hogy $B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, $B_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$, és minden $i \leq r$-re $H_i = B_1 - \{x_1, \ldots, x_i\} + \{y_1, \ldots, y_i\}$ bázis. Definiáljuk a segédgráfbeli utat $y_1, x_1, y_2, x_2, \ldots$-nak. Ekkor egy r méretű halmaz nem tartalmaz élt az útból pontosan akkor, ha B_1, B_2 vagy H_i valamilyen i-re. De ezek mindegyike bázis, így ez az út garantálja, hogy minden kör tartalmazzon szomszédos elemeket.

A nagykörű matroidok speciális esetei a split-matroidoknak:

Definíció. Legyen $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_q\}$ hipergráf az $\mathcal{S}$ alaphalmazon, és $r, r_1, \ldots, r_q \in \mathbb{Z}^+$ olyanok, hogy $|H_i \cap H_j| \leq r_i + r_j + r$ minden i, j párra. Ekkor az $\mathcal{I} = \{X \subseteq \mathcal{S} : |X| \leq r, |X \cap H_i| \leq r_i \ \forall i\}$ egy matroid független halmazait alkotják. Ezt nevezzük split matroidnak.

Ez a definíció valóban kiterjesztése a nagykörű matroid fogalmának: az $r_i = r$, $\forall i$ esetben visszakpjuk a nagykörű matroidokat. Ez a tulajdonság, valamint a mögöttes hipergráf-struktúra lehet segítségünkre abban, hogy a kutatás következő lépéseként bebizonyíthassuk a sejtést a split matroidok esetében is.

Végezetül megemlítjük, hogy a sejtésnek egy általánosabb alakja is megfogalmazható, a következő formában: legyen $M = (S, r)$ egy matroid az S alaphalmazon, melyre $\beta(M)$ jelöli az S-et lefedő független halmazok minimális számát. Ekkor létezik egy $G = (S, E)$ gráf, melyben a maximális fokszám $\Delta = 2\beta(M) - 2$, és minden G-beli stabil halmaz M-ben független. A sejtésnek ez az erősebb alakja hamisnak bizonyult, azonban az eredeti kérdés (a $\beta(M) = 2, G$ egy út speciális eset) még mindig válaszra vár.

Irodalomjegyzék

[1] *Exchange distance of basis pairs in split matroids*, Kristóf Bérczi, Tamás Schwarcz

[2] *Matroidelmélet*, András Frank

[3] *Diszkrét optimalizálás*, András Frank, Tibor Jordán