Egy paraméteres önhasonló halmazcsalád közös pontjai

Imolay András Zólomy Kristóf

2021. december 10.

Kivonat

Szeptemberben felkerült az arXiv-ra az "On a class of self-similar sets which contain finitely many common points" című cikk [3]. A kutatásunk fő célja ennek a cikknek a feldolgozása. Ennek keretében önhasonló halmazoknak egy paraméteres családjával foglalkoztunk. Azt a kérdést vizsgálja a cikk, hogy a paramétertérben milyen tulajdonságokkal rendelkezik az a halmaz, ami azon paraméterekből áll, melyekre az önhasonló halmaz tartalmaz egy rögzített x pontot.

1. Bevezetés

Köszönjük szépen a témavezetőnknek, Keleti Tamásnak, hogy kaptunk tőle témát, illetve a támogatást a kutatásaink során.

Korábbi tanulmányaink során, az ELTE matematikus BSc alatt csak említés szintjén találkoztunk önhasonló halmazokkal. Zólomy Kristóf a szakdolgozatában foglalkozott ehhez hasonló témával, ám még ő is kevés előismerettel rendelkezett, hogy értelmesen tudjunk kutatni ebben a témában. Így a kutatásunk első fele leginkább azzal telt, hogy elkezdtünk beletanulni a témába. Ehhez két nevezetes könyvet használtunk a témában, M. Barnsley "Fractals everywhere" [1] című művét, illetve K. Falconer "Fractal geometry" [2] című könyvét.

A második fejezetben összefoglaljuk a témában fontos alapfogalmakat, majd a harmadik fejezetben a feldolgozott cikket foglaljuk össze.

2. Alapok

Először leírunk néhány alapvető definíciót, tételt amit valószínűleg mindenki tud, aki elvégezte a matek BSc-t, de a témánk szempontjából kulcsfontosságúak. Ám azon definíciókat amik tényleg nagyon alapvetőek (mint például a teljes metrikus tér, illetve az analízis alapjai) ismertnek vesszük.

2.1. Definíció. Legyen X egy teljes metrikus tér. Ekkor egy $f : X \to X$ függvényt *kontrakció*nak nevezünk, ha létezik olyan $c < 1$ konstans, melyre

$$|f(x) - f(y)| < c|x - y|$$

minden $x, y \in X$ esetén.

2.2. Definíció. A fenti definícióban, ha $<$ helyett $=$ van, azaz $|f(x) - f(y)| = c|x - y|$ akkor f *hasonlóság.*

2.3. Tétel (Banach-féle fixponttétel)**.** *Adott egy $f : X \to X$ kontrakció az X teljes metrikus téren. Ekkor az f-nek pontosan egy fixpontja van, továbbá tetszőleges $x \in X$ pontból kiindulva az $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ sorozat a fixponthoz konvergál.*

2.4. Definíció. A valós számok egy korlátos A részhalmazát *önhasonló*nak nevezzük, ha léteznek olyan $f_1, f_2, \ldots f_s$ hasonlóságok, melyekre $f_i(A) \neq A$ és

$$A = \bigcup_{i=1}^{s} f_i(A).$$

Azaz a halmaz előáll mint hozzá hasonló részhalmazok uniója. Ezt általánosabban is ki lehetne mondani tetszőleges kompakt metrikus térre, nem csak a valós számok részhalmazaira, de mi csak $\mathbb{R}$-en fogunk dolgozni.

Önhasonló halmazok gyártására nagyon jó módszer úgynevezett *iterated function system*-eket, azaz IFS-eket vizsgálni. Egy IFS az $f_1, f_2, \ldots, f_s$ kontrakciókból áll. A következő tétel teszi ezt nagyon hasznossá:

2.5. Tétel. *Legyenek $f_1, f_2, \ldots f_s$ kontrakciók a valós számokon. Ekkor pontosan egy olyan $F \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz van, melyre*

$$F = \bigcup_{i=1}^{s} f_i(F).$$

Ennek a tételnek röviden belemegyünk a bizonyításvázlatába, mert hasznos, és még kelleni fognak belőle ötletek.

Jelölje $\mathcal{K}$ a valós egyenesen a kompakt halmazok halmazát. Tetszőleges $K \in \mathcal{K}$ esetén legyen K_δ a halmaz δ-környezete, azaz

$$K_\delta = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \text{létezik } a \in K \text{ melyre } |x - a| \leq \delta\}.$$

Most definiálunk $\mathcal{K}$-n egy metrikát. Legyen $A, B \in \mathcal{K}$, definiáljuk a távolságukat a következőképpen:

$$d(A, B) = \inf\{\delta \ : \ A \subset B_\delta \text{ és } B \subset A_\delta\},$$

azaz azon δ-k infímumát nevezzük a távolságnak, melyre már az A-nak a δ környezete is lefedi B-t, és B-nek a δ-környezete is lefedi A-t.

2.6. Tétel. *A fent definiált d függvénnyel az X tér teljes metrikus tér. Ezt a metrikát* Hausdorff-metrikának *nevezzük.*

Ezt a tételt nem igazoljuk, nem nagyon nehéz, csak ellenőrizni kell, hogy tényleg minden teljesül ami kell, hogy teljes metrikus tér legyen.

Most térjünk vissza a 2.5. Tétel bizonyítására. Az $f_1, f_2, \ldots, f_s$ leképzések a $\mathcal{K}$ téren is megadnak egy f leképzést úgy, hogy minden $K \in \mathcal{K}$ esetén

$$f(K) = \bigcup_{i=1}^{s} f_i(K).$$

Nem nehéz igazolni, hogy ez egy kontrakció a Hausdorff-metrika szerint, így a Banach fixponttétel miatt tényleg pontosan egy olyan $F \in \mathcal{K}$ lesz, melyre

$$F = f(F) = \bigcup_{i=1}^{s} f_i(F),$$

és pont ezt akartuk igazolni. A bizonyításból az is látszik, hogy tetszőleges $K \in \mathcal{K}$ halmazból kiindulva (akár egy szakasz, vagy egy zárt intervallum) teljesül, hogy a $K, f(K), f(f(K)), \ldots$ sorozat Hausdorff-metrika szerint a fixponthoz fog tartani.

Az önhasonló halmazok méretét jól lehet jellemezni a Hausdorff-dimenzióval, amit az alábbiakban definiálunk.

2.7. Definíció. $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz s-dimenziós *Hausdorff-mértéke*

$$\mathcal{H}^s(A) = \liminf_{\delta \to 0} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} d(U_i)^s : \{U_i\} \text{ egy olyan fedése A-nak, hogy } \forall i\text{-re } d(U_i) < \delta \right\}.$$

A Hausdorff-mérték kis s esetén (a véges halmazokat leszámítva) végtelen, nagy s-re pedig 0, és van a kettő között egyetlen határpont, ezt hívjuk a halmaz Hausdorff-dimenziójának:

2.8. Definíció. $A \subset \mathbb{R}^n$ *Hausdorff-dimenziója*:

$$\dim_H A = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

3. A cikk összefoglalása

A feldolgozott cikk a következő két függvényből álló paraméteres IFS családot vizsgálja a számegyesen a $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ paraméterek esetén:

$$\{f_{\lambda,0}(x) = \lambda x,\ f_{\lambda,1}(x) = \lambda x + (1 - \lambda)\}.$$

Jelölje K_λ az egyetlen kompakt halmazt amire $K_\lambda = f_\lambda(K_\lambda) = f_{\lambda,0}(K_\lambda) \cup f_{\lambda,1}(K_\lambda)$, ahol f_λ az előző fejezetben látottakhoz hasonlóan a kompaktok terén jelöli az

$$f_\lambda(F) = f_{\lambda,0}(F) \cup f_{\lambda,1}(F)$$

leképzést.

Vizsgáljuk meg, hogyan is néz ki a K_λ halmaz. A $\lambda = \frac{1}{2}$ eset kivételes, ekkor világos, hogy a $[0, 1]$ intervallum kielégíti az $f_{1/2}([0, 1]) = [0, 1]$ egyenletet, így $K_{1/2} = [0, 1]$. Mint később is látni fogjuk ez az eset kicsit különböző a többitől, így többször külön kell foglalkozni vele.

Fixáljuk le a $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ számot (azaz nem mindenhova írjuk ki a λ indexet). Induljunk ki a $[0, 1]$ intervallumból, és alkalmazzuk rá sokszor az f_λ függvényt, azaz legyen $F_0 = [0, 1]$ és $F_n = f_\lambda(F_{n-1})$ minden $n \geq 1$ esetén. Tudjuk, hogy ekkor az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompaktokból álló sorozat tartani fog K_λ-hoz a Hausdorff-metrika szerint. Az ábra jól illusztrálja, hogy kicsi n értékekre hogyan néz ki F_n:

A felső szint a teljes intervallum, utána F_1 a második szint, két λ hosszú intervallum, majd ezek megint ugyanígy két kisebb intervallumra bomlanak, amiknek λ^2 a hossza, azaz F_2 az ábrán a harmadik szint, 4 darab λ^2 hosszú intervallumból áll, és így tovább.

1. ábra. Ábra forrása: Wikipédia

Ez pont úgy néz ki, ahogy a Cantor-halmazt definiálni szoktuk, csak most $\frac{1}{3}$ helyett más λ számokra, de világos, hogy így is ezen F_n halmazok egy szűkülő sorozatot alkotnak amiknek a metszete egy Cantor-halmaz, amennyiben a Cantor-halmaznak a következő általános definícióját használjuk: Egy halmaz Cantor-halmaz, ha kompakt, sehol sem sűrű és nincs izolált pontja. Továbbá mivel az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat tart a K_λ-hoz Hausdorff-metrika szerint, így K_λ ezen szűkülő F_n halmazsorozat metszete lesz, azaz egy Cantor-halmaz. Ezzel a K_λ halamzokat lényegében teljesen megértettük.

A cikk azzal foglalkozik, hogy egy $x \in [0,1]$ szám esetén a paramétertérben milyen tulajdonságokkal rendelkezik az a halmaz, melyben azok a paraméterek vannak, amelyekre $x \in K_\lambda$. Legyen tehát $x \in [0,1]$ esetén $\Lambda(x) = \{\lambda \in (0, \frac{1}{2}] : x \in K_\lambda\}$ azon paraméterek halmaza, melyekhez tartozó önhasonló halmaz tartalmazza x-et. A fent leírtakból világos, hogy minden λ-ra K_λ szimmetrikus $\frac{1}{2}$-re, így $\Lambda(x) = \Lambda(1-x)$, tehát elegendő a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumon vizsgálni a $\Lambda(x)$-t. A cikk a $\Lambda(x)$ halmaz tulajdonságairól szól, ahol $x \in (0, \frac{1}{2})$. Az $x = 0$ és $x = \frac{1}{2}$ esetek nem érdekesek, mert a korábbiakból látható, hogy $\Lambda(0) = (0, \frac{1}{2}]$, illetve $\Lambda(1/2) = \{\frac{1}{2}\}$. A szerzők megvizsgálták a halmaz topológiai tulajdonságait, továbbá a halmaz méretét Lebesgue-mérték, illetve Hausdorff-dimenzió szempontjából. A következőkben ezeket foglaljuk össze vázlatosan.

3.1. Tétel. *Bármely $x \in (0, \frac{1}{2})$ esetén $\Lambda(x)$ egy Cantor-halmaz, melynek minimuma x és maximuma $\frac{1}{2}$.*

A cikkben fontos eszköz, hogy K_λ minden x pontjához párosítani tud egy $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$-beli (i_n) sorozatot rendezéstartó módon (utóbbi halmazon a lexikografikus rendezést tekintve), mivel minden $x \in K_\lambda$ előáll $(1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} i_n \lambda^{n-1}$ alakban, ahol $i_n \in \{0,1\}$:

Legyen $\pi_\lambda : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to K_\lambda$ a hozzárendelés, $\pi_\lambda((i_n)) = (1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} i_n \lambda^{n-1}$. Ha $f_{\lambda,0}$ és $f_{\lambda,1}$ a két definiáló hasonlóság, akkor $\pi_\lambda((i_n)) = \lim_{n\to\infty} f_{\lambda,i_1} \circ f_{\lambda,i_2}, \circ \cdots \circ f_{\lambda,i_n}(0)$.

Legyen ezután $\Pi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times (0, \frac{1}{2}] \to [0,1]$ az a transzformáció, melyre $\Pi((i_n), \lambda) = \pi_\lambda((i_n))$. A 0-1 sorozatok terén definiálhatunk egy metrikát: $\rho((i_n), (j_n)) = 2^{-\inf\{k \geq 1 : i_k \neq j_k\}}$.

A Π hozzárendelésről belátták, hogy folytonos, első koordinátájában monoton nő, $\lambda < \frac{1}{2}$ esetén pedig szigorúan monoton.

Továbbá ha $(0,0,0,0,\dots) \prec (i_n) \preccurlyeq (0,1,1,1,\dots)$, akkor a $\Pi((i_n), \cdot)$ koordinátafüggvénynek $(0, \frac{1}{2})$-en pozitív a deriváltja.

Rögzített λ-ra jelöljük $\Gamma_x(\lambda)$-val azon (i_n) $0-1$ sorozatok halmazát, melyek előállítják x-et, azaz $(1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} i_n \lambda^{n-1} = x$. Mivel π_λ $\lambda \neq \frac{1}{2}$ esetén injektív, ilyen paraméterekre $\Gamma_x(\lambda)$ 1 elemű, $\lambda = \frac{1}{2}$ esetén pedig legfeljebb kettő. Ez alapján minden $\lambda \in \Lambda(x)$-hez hozzárendelhetjük a rendezés szerint legnagyobb, x-et előállító sorozatot, ez legyen $\Psi_x(\lambda)$.

Jelöljük (x_n)-nel $\Psi_x(\frac{1}{2})$-et. A Ψ függvény megad egy homeomorfizmust, amivel később könnyebben lehet kezelni a $\Lambda(x)$ halmazt:

3.2. Definíció. $\Omega(x) = \{(i_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : (x_n) \preccurlyeq (i_n) \preccurlyeq 01^\infty\}$

3.3. Lemma. *Bármely $x \in (0, \frac{1}{2})$-re a $\Psi_x : \Lambda(x) \to \Omega(x)$ egy monoton csökkenő homeomorfizmus.*

Ebből könnyen következik a 3.1-es tétel: $\Omega(x)$ a fent leírt ρ metrikával egy Cantor halmaz, ezért az ősképe, $\Lambda(x)$ is az lesz.

A következő fejezetben $\Lambda(x)$ Hausdorff-mértékét vizsgálták meg:

3.4. Tétel. *Ha $x \in (0, \frac{1}{2})$, akkor bármely $\lambda \in \Lambda(x)$-re*

$$\lim_{\delta \to 0} \dim_H(\Lambda(x) \cap (\lambda - \delta, \lambda + \delta)) = \dim_H K_\lambda = -\frac{\log 2}{\log \lambda}.$$

Ennek bizonyításához két lemmát használnak.

3.5. Lemma. *Ha $x \in (0, \frac{1}{2})$, akkor bármely $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$-re*

$$\dim_H(\Lambda(x) \cap [x, \lambda]) \leq \dim_H K_\lambda.$$

Bizonyítás. Mivel a π_λ és a Ψ_x leképzések is injektívek $\lambda \neq \frac{1}{2}$ esetén, a $\pi_\lambda \circ \Psi_x : \Lambda(x) \cap [x, \lambda] \to K_\lambda$ függvény szintén injektív. A Hausdorff-dimenzió Lipschitz leképzések során nem nő, ezért elég lenne belátni, hogy a $\pi_\lambda \circ \Psi_x$ leképzés inverze Lipschitz, vagyis

$$|\pi_\lambda(\Psi_x(\lambda_1)) - \pi_\lambda(\Psi_x(\lambda_2))| \geq C|\lambda_1 - \lambda_2|$$

valamilyen $C > 0$ konstansra bármely $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda(x) \cap [x, \lambda]$ esetén.

Vegyünk tehát λ_1, λ_2-t, legyen $\Psi_x(\lambda_1) = (i_n), \Psi(\lambda_2) = (j_n)$, ekkor $x \in (0, \frac{1}{2})$ miatt $i_1 = j_1 = 0$, így

$$(1 - \lambda_1) \sum_{n=2}^{\infty} i_n \lambda_1^{n-1} = x = (1 - \lambda_2) \sum_{n=2}^{\infty} j_n \lambda_2^{n-1}. \tag{1}$$

A 3.3-as lemma miatt $(i_n) \prec (j_n)$, azaz van egy $m \geq 2$, hogy $i_1 \dots i_{m-1} = j_1 \dots j_{m-1}$ és $i_m = 1, j_m = 0$.

(1)-ből rövid számolás után adódik, hogy $\frac{x(1-\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}(\lambda_2 - \lambda_1) \leq \frac{\lambda_1^{m-2}}{1-\lambda_1}$, majd ebből $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda$ felhasználásával kijön, hogy $\lambda^m \geq x(1 - 2\lambda)(\lambda_2 - \lambda_1)$. Ezt felhasználva

$$|\pi_\lambda(\Psi_x(\lambda_1)) - \pi_\lambda(\Psi_x(\lambda_2))| = (1 - \lambda) \left(\sum_{n=1}^{\infty} i_n \lambda^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} j_n \lambda^{n-1} \right) \geq$$

$$\geq (1 - \lambda) \left(\lambda^{m-1} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda^{n-1} \right) = (1 - 2\lambda)\lambda^{m-1} \geq C|\lambda_1 - \lambda_2|,$$

ahol $C = \frac{x(1-2\lambda)^2}{\lambda} > 0$ egy λ_1, λ_2-től független pozitív konstans, ezzel a lemma bizonyítása kész. □

3.6. Lemma. *Legyen $x \in (0, \frac{1}{2})$. Ha $\lambda \in \Lambda(x) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ olyan, hogy $\Psi_x(\lambda)$ nem 0^∞-nel végződik, akkor bármely $\delta \in (0, \frac{1}{2} - \lambda)$-ra*

$$\dim_H(\Lambda(x) \cap [\lambda, \lambda + \delta]) \geq \dim_H K_\lambda.$$

Ennek bizonyításához $\Lambda(x)\cap[\lambda,\lambda+\delta]$-ban vettek egy olyan részhalmazsorozatot, melyek Hausdorff-dimenziója $\dim_H K_\lambda$-hoz tart. Ehhez definiálták $\Omega_{\lambda,k}\subset\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ halmazt: legyen $\Psi_x(\lambda)=(c_n)\succ(x_n)$, n_0 az első index, melyben a két sorozat eltér, n_k pedig egy olyan monoton növekvő indexsorozat, hogy $c_{n_k}=1$ minden k-ra.

$\Omega_{\lambda,k}=\{c_1c_2\dots c_{n_k-1}0i_1i_2\dots:$ az (i_n) sorozat nem tartalmaz k darab egymást követő 0-t$\}$.

Erre a részhalmazsorozatra belátják, hogy

$$\lim_{k\to\infty}\dim_H\Psi_x^{-1}(\Omega_{\lambda,k})\geq\dim_H K_\lambda, \tag{2}$$

ami elég, hiszen minden $(j_n)\in\Omega_{\lambda,k}$-ra $(c_n)\succ(j_n)\succ(x_n)$, ezen a tartományon pedig a 3.3-as lemma miatt Ψ_x minden értéket felvesz, tehát $\Omega_{\lambda,k}\subset\Psi_x(\Lambda(x)\cap[\lambda,\lambda+\delta])$. Ezekből adódik $\Psi_x^{-1}(\Omega_{\lambda,k})\subset\Lambda(x)\cap[\lambda,\lambda+\delta]$.

(2) bizonyításához először belátják, hogy $\pi_\lambda\circ\Psi_x$-nek nem csak az inverze, mint az előző bizonyításban megmutattak, hanem ő maga is Lipschitz, ezért elég $\pi_\lambda(\Omega_{\lambda,k})$ Hausdorff-dimenzióját becsülni, ami pedig már könnyen megy:

$$\begin{aligned}\dim_H\pi_\lambda(\Omega_{\lambda,k})&=\dim_H\pi_\lambda(\{(i_n):(i_n)\text{ nem tartalmaz }k\text{ darab egymást követő 0-t}\})\geq\\&\geq\dim_H\pi_\lambda(\{(i_n):i_n=1\text{ minden }n\text{-re, amire }k|n\})=\\&=-\frac{(k-1)\log 2}{k\log\lambda}\to-\frac{\log 2}{\log\lambda}=\dim_H K_\lambda,\end{aligned}$$

ahol az első egyenlőségnél kihasználtuk, hogy az önhasonló halmazra véges f_{λ,i_j} definiáló hasonlóságot alkalmazva az továbbra is hasonló lesz K_λ-hoz, ezért Hausdorff-dimenziója nem változik. A második sor első tagja és a harmadik sor első tagja közti egyenlőség pedig azért igaz, mert az ott szereplő halmazt tekinthetjük úgy, hogy 2^{k-1} darab λ^k arányú hasonlóság definiálja ($g_{\lambda^k,\overline{i_0i_1\dots i_{k-1}}}(x)=f_{\lambda,1}\circ f_{\lambda,i_{k-1}}\circ\dots f_{\lambda,i_2}\circ f_{\lambda,i_1}(x)$), ezért a halmaz Hausdorff-dimenziója

$$\dim_H\pi_\lambda(\{(i_n):i_n=1\text{ minden }n\text{-re, amire }k|n\})=-\frac{\log 2^{k-1}}{\log\lambda^k}=-\frac{(k-1)\log 2}{k\log\lambda},$$

ezzel a lemma állítása be van látva.

A 3.4-es tétel bizonyítása a lemmák segítségével:

Azt tudjuk, hogy $\Lambda(x)\subset[x,\frac12]$, legyen $\lambda\in\Lambda(x)$ tetszőleges. Itt két esetet tárgyalnak, $\lambda<\frac12$ és $\lambda=\frac12$-et. Az utóbbi az elsőhöz hasonlóan jön ki, így csak az előbbit mutatjuk be.

Először használjuk a 3.5-ös lemmát, ebből adódik, hogy bármely $\delta\in(0,\frac12-\lambda)$-ra

$$\dim_H(\Lambda(x)\cap(\lambda-\delta,\lambda+\delta))\leq\dim_H(\Lambda(x)\cap(x,\lambda+\delta])\leq\dim_H K_{\lambda+\delta}=-\frac{\log 2}{\log(\lambda+\delta)},$$

tehát

$$\lim_{\delta\to 0}\dim_H(\Lambda(x)\cap(\lambda-\delta,\lambda+\delta))\leq-\frac{\log 2}{\log\lambda}=\dim_H K_\lambda.$$

A másik irányú egyenlőtlenséghez használni szeretnénk a 3.6-os lemmát, ehhez elég olyan $\Lambda(x)\cap(\lambda-\delta,\lambda+\delta)$ intervallumban futó $(\lambda_k)\to\lambda$ sorozatot találni, melynek egyik tagjának Ψ_x-nél vett képe sem végződik csupa 0-ra (ilyen biztosan létezik, mivel $\Lambda(x)$ egy Cantor-halmaz), minden λ_k-ra alkalmazva lemmát adódik, hogy

$$\begin{aligned}\dim_H(\Lambda(x)\cap(\lambda-\delta,\lambda+\delta)) \geq \dim_H(\Lambda(x)\cap(\lambda_k,\lambda+\delta]) \geq \dim_H K_{\lambda_k} = \\ = -\frac{\log 2}{\log \lambda_k} \to -\frac{\log 2}{\log \lambda} = \dim_H K_\lambda,\end{aligned}$$

azaz $k \to \infty$-nel adódik az alsó korlát is.

3.7. Következmény. *Ha $x \in (0, \frac{1}{2})$, akkor bármely $I \subset [0, \frac{1}{2}]$ nyílt intervallumra, melyre $I \cap \Lambda(x) \neq \emptyset$,*

$$\dim_H(\Lambda(x) \cap I) = \sup_{\lambda \in \Lambda(x) \cap I} \dim_H K_\lambda.$$

Bizonyítás. A $\geq$ irány a tételből következik, mivel minden $\lambda \in \Lambda(x) \cap I$-hez elég kicsi δ esetén $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subset I$, így

$$\dim_H(\Lambda(x) \cap I) \geq \lim_{\delta \to 0} \dim_H(\Lambda(x) \cap (\lambda - \delta, \lambda + \delta)) = \dim_H(K_\lambda).$$

A másik irányhoz legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és minden $\lambda \in \Lambda(x) \cap I$ esetén legyen δ_λ olyan kicsi, hogy $(\lambda - \delta_\lambda, \lambda + \delta_\lambda) \subset I$, továbbá

$$\dim_H((\lambda - \delta_\lambda, \lambda + \delta_\lambda) \cap \Lambda(x)) \leq \dim_H(K_\lambda) + \varepsilon \leq \sup_{\lambda \in \Lambda(x) \cap I} \dim_H K_\lambda + \varepsilon.$$

Az összes $\lambda \in \Lambda(x) \cap I$ esetén véve a $(\lambda - \delta_\lambda, \lambda + \delta_\lambda)$ intervallumokat, ezek fedik a $\Lambda(x) \cap I$ halmazt, így megszámlálható sok is fedi. Emiatt $\Lambda(x) \cap I$ Hausdorff-dimenziója megegyezik ezen megszámlálható sok $(\lambda - \delta_\lambda, \lambda + \delta_\lambda) \cap \Lambda(x)$ halmaz Hausdorff-dimenziójának a szuprémumával, azaz

$$\dim_H(\Lambda(x) \cap I) \leq \sup_{\lambda \in \Lambda(x) \cap I} \dim_H K_\lambda + \varepsilon.$$

Ezután $\varepsilon \to 0$ pont a bizonyítandót adja. □

Ezzel a következménnyel könnyen kijön a cikk második fő tétele is:

3.8. Tétel. *Bármely $x \in (0, \frac{1}{2})$-re $\Lambda(x)$ Hausdorff-dimenziója 1, Lebesgue-mértéke pedig 0.*

Bizonyítás. $\dim_H(\Lambda(x)) = \dim_H(\Lambda(x) \cap (x, \frac{1}{2})) = \sup_{\lambda \in \Lambda(x) \cap (x, \frac{1}{2})} \dim_H K_\lambda = 1$ a következmény alapján. Szintén következik belőle, hogy $\Lambda_n(x) = \Lambda(x) \cap [x, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$ Hausdorff dimenziója legfeljebb $-\frac{\log 2}{\log(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})} < 1$, ekkor viszont az 1-dimenziós Lebesgue mértéke csak 0 lehet, $\Lambda(x) = \bigcup \Lambda_n(X)$-ből pedig következik, hogy $\Lambda(x)$ Lebesgue-mértéke is 0. □

Hivatkozások

[1] Barnsley, Michael F. Fractals everywhere. Academic press, 2014.

[2] Falconer, Kenneth. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, 2004.

[3] Wang, Zhiqiang, et al. "On a class of self-similar sets which contain finitely many common points." arXiv preprint arXiv:2109.10014 (2021).