Elemrendek összege feloldható csoportokban

Előzetes eredmények

Definició (Elemrendek összege)

Legyen G véges csoport, ekkor $\Psi(G) = \sum_{g \in G} o(g)$ jelöli az elemrendjeinek összegét.

Tétel

Ha G nem ciklikus, n rendű csoport, akkor $\Psi(G) \leq \frac{7}{11}\Psi(C_n)$.

Tétel

Ha G nem ciklikus, n rendű csoport, q az n legkisebb prímosztója, akkor $\Psi(G) \leq \frac{1}{q-1}\Psi(C_n)$.

Előzetes eredmények

Tétel

Ha $n = p^r$*, azaz prímhatvány, akkor* $\Psi(C_n) = \frac{p^{2r+1}+1}{p+1}$.

Tétel

Legyen q *az* n *legkisebb prímosztója. Ekkor* $\Psi(G) \geq \frac{n}{q}\varphi(n)$.

$\frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} < 2,1666$

$$\frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} \leq \prod_{p|n} \frac{p^3+1}{p^3-p} = \prod_{p|n}(1+\frac{p+1}{p^3-p}) \leq e^{\sum_{p|n} \frac{p+1}{p^3-p}}$$

$$\sum_{p \text{ prím}} \frac{1}{p^2-1} = P(2)+P(4)+P(6)+\ldots, \quad \sum_{p \text{ prím}} \frac{1}{p^3-p} = P(3)+P(5)+P(7)+\ldots$$

$$\sum_{p \text{ prím}} \frac{p+1}{p^3-p} = P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)+P(7)+\ldots = 0,7731566690\ldots$$

$$\frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} \leq e^{\sum_{p|n} \frac{p+1}{p^3-p}} < e^{\sum_{p \text{ prím}} \frac{p+1}{p^3-p}} = 2,16659469\ldots$$

$\frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} < 1,9436$

$$\frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} \leq \prod_{p\ prím} \frac{p^3+1}{p^3-p} = \frac{\prod(1-\frac{1}{p^6})}{\prod(1-\frac{1}{p^3})\prod(1-\frac{1}{p^2})}$$

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^k}} = \prod(1+\frac{1}{p^k}+\frac{1}{p^{2k}}+\ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \zeta(k)$$

$$\frac{\Psi(C_n)}{n\varphi(n)} \leq \frac{\prod(1-\frac{1}{p^6})}{\prod(1-\frac{1}{p^3})\prod(1-\frac{1}{p^2})} = \frac{\zeta(3)\zeta(2)}{\zeta(6)} = 1,943596436820759\ldots$$

Prímhatvány rendű csoportok prímnégyzet indexű ciklikus részcsoporttal

$|G| = p^n$, $|H| = p^{n-2}$ maximális ciklikus részcsoport, nem normálosztó
$H \lhd M \lhd G$
$M \simeq C_{p^{n-2}} \times C_p = \langle u, v \mid u^{p^{n-2}} = 1, v^p = 1 \rangle$

M automorfizmusai

α az M csoport egy p-rendű automorfizmusa: $u^\alpha = u^x v^y$, $v^\alpha = u^z v^t$.
x és z értékeket modulo p^{n-2}, az y és t értékeket modulo p nézzük.

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}^p \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x-1 & y \\ z & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}^p \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} x-1 & y \\ z & 0 \end{bmatrix} + \binom{p}{2} \begin{bmatrix} (x-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} (x-1)^p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}^p \equiv \begin{bmatrix} x^p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$u^\alpha = u^{1+p^{n-3}x} v^y$, $v^\alpha = u^{p^{n-3}z} v$

$$\begin{bmatrix} 1+p^{n-3}x & y \\ p^{n-3}z & 1 \end{bmatrix}^p \equiv \begin{bmatrix} 1+p^{n-2}x+\binom{p}{2}p^{n-3}yz & py \\ p^{n-2}z & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esetek

$G \simeq \langle u, v, w \mid uv = vu, u^{p^{n-2}} = 1, v^p = 1, w^{-1}uw = u^{1+p^{n-3}x}v^y, w^{-1}vw = u^{p^{n-3}z}v\rangle$

$a \in M : (wa)^p = w^p a^p$

Tetszőleges k, l-re $(u^k v^l)^\alpha = u^k v^l$ teljesül, ha $u^{p^{n-3}(kx+lz)}v^{ky} = 1$

- Első eset: $y = 1, z = 0$
  $w^{-1}uw = u^{1+p^{n-3}x}v$, $w^{-1}vw = v$, $w^p \in \langle u^p, v\rangle$.
  Ugyan arra vezethető vissza, mint az ötödik eset.
- Második eset: $y = 1, z \neq 0$
  $w^{-1}uw = u^{1+p^{n-3}x}v$, $w^{-1}vw = u^{p^{n-3}z}v$, $w^p \in \langle u^p\rangle$, WLOG $w^p = 1$
  v helyett $u^{p^{n-3}t}v$: $w^{-1}uw = uv$
  $z = 1, \ldots, p-1$ ugyan azt adja
  $\Psi(G) = \Psi(M) \cdot p + (p-1)\cdot(p-1) = \frac{p^{2n-1}+p^4-p^2+1}{p+1}$
- Harmadik eset: $y = 0, x = 0, z = 1$
  $k = 1, \ldots, p-1 \Rightarrow o(w) = p^{n-1}$, ez nem felel meg, így $k = 0$.
  $w^{-1}uw = u$, $w^{-1}vw = u^{p^{n-3}}v$, $w^p = 1$
  $\Psi(G) = \Psi(M) \cdot p + (p-1)\cdot(p-1) = \frac{p^{2n-1}+p^4-p^2+1}{p+1}$.

Esetek

$G \simeq \langle u, v, w \mid uv = vu, u^{p^{n-2}} = 1, v^p = 1, w^{-1}uw = u^{1+p^{n-3}x}v^y, w^{-1}vw = u^{p^{n-3}z}v \rangle$

$a \in M : (wa)^p = w^p a^p$

Tetszőleges k, l-re $(u^k v^l)^\alpha = u^k v^l$ teljesül, ha $u^{p^{n-3}(kx+lz)} v^{ky} = 1$

- Negyedik eset: $y = 0, x = 1, z \neq 0$
  $w^{-1}uw = u^{1+p^{n-3}}, w^{-1}vw = u^{p^{n-3}}v, w^p = 1$
  Fix részcsoport: $\langle u^{-1}v \rangle$
  u helyett uv^{-1} $\Psi(G) = \Psi(M) \cdot p + (p-1) \cdot (p-1) = \frac{p^{2n-1}+p^4-p^2+1}{p+1}$
- Ötödik eset: $y = 0, x = 1, z = 0$
  $w^{-1}uw = u^{1+p^{n-3}}, w^{-1}vw = v, w^p \in \langle u^p, v \rangle$
  WLOG $w^p \in \langle v \rangle$: vagy $v = w^p$, vagy $\langle u, w \rangle \times \langle v \rangle$ a keresett csoport.
  - $\Psi(G) = \Psi(M) \cdot p + (p-1) \cdot (p^2-1) + (p-1) \cdot (p-1) \cdot (p+1) \cdot (p^2-p) = \frac{p^{2n-1}+p^6-p^5+p^3-p^2+1}{p+1}$
  - $\Psi(G) = \Psi(M) \cdot p + (p-1) \cdot (p-1) = \frac{p^{2n-1}+p^4-p^2+1}{p+1}$

Elemrend összegek összehasonlítása

Így összesen két különböző elemrend-összeget kaptunk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Psi(G)}{\Psi(C_{p^n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{p^{2n-1}+p^4-p^2+1}{p+1}}{\frac{p^{2n+1}+1}{p+1}} = \frac{1}{p^2}$$

illetve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Psi(G)}{\Psi(C_{p^n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{p^{2n-1}+p^6-p^5+p^3-p^2+1}{p+1}}{\frac{p^{2n+1}+1}{p+1}} = \frac{1}{p^2}$$