ELSŐ ÁTHALADÁSI PERKOLÁCIÓ

SZEPESSY LUCA

Témavezető: Maga Balázs

Kivonat. Az első áthaladási perkoláció elméletét 1965-ben alkotta meg Hammersley és Welsh: céljuk folyadékok porózus közegen történő átszivárgásának modellezése volt a valószínűségszámítás eszközeivel. A kutatómunkám célja ezen elmélet alapvető kérdéseinek és eredményeinek megismerése volt. Ehhez Antonio Auffinger, Michael Damron és Jack Hanson *50 years of first passage percolation* című monográfiájának ([1]) első két fejezetét dolgoztam fel, melynek köszönhetően mélyebben megismertem az időkonstans és a határalakzat természetét.

1. Bevezetés

Az első áthaladási perkoláció elméletét folyadékok porózus, azaz lyukacsos anyagon történő átszivárgásának modellezésére hozták létre. Mindenki számára ismerős jelenség például, amikor egy papírra véletlenül rácseppent egy-két csepp teát, kávét, és ez egy furcsa alakú pacát hagy maga után a papíron. Itt a papír az a bizonyos porózus közeg, melyen a folyadék első ránézésre egészen szabálytalan módon átszivárog.

A porózus közeget először egy $\mathbb{Z}^d$ rács fogja modellezni, ahol a rácsvonalak jelentik a lyukacskákat, azaz az éleket, amiken közlekedni lehet. Minden e élhez hozzárendelünk egy τ_e valószínűségi változót, amit az él áthaladási idejének nevezünk, és úgy gondolunk rá, hogy ez adja meg, mennyi idő átjutni az adott élen. A τ_e változók családjáról feltesszük, hogy független, azonos eloszlású változók ν eloszlással és F eloszlásfüggvénnyel.

Útnak nevezünk egy véges vagy végtelen $e_1, e_2, ...$ élsorozatot, ha e_i-nek és e_{i+1}-nek pontosan egy közös végpontja van minden $i \geq 1$-re. Egy véges Γ útnak definiálhatjuk az áthaladási idejét, mint a benne található élek áthaladási idejének összegét: $T(\Gamma) = \sum\limits_{e \in \Gamma} \tau_e$. Ennek segítségével pedig már beszélhetünk két pont távolságáról: $x, y \in \mathbb{Z}^d$ pontok távolsága legyen $T(x, y) = \inf\limits_{\Gamma} T(\Gamma)$, ahol az infimumot az x-et és y-t tartalmazó véges élszámú utakon vesszük.

A távolságfogalmat kiterjeszthetjük $\mathbb{R}^d$ pontjaira is, ekkor az x és $y \in \mathbb{R}^d$ pontok távolságán azon x' és $y' \in \mathbb{Z}^d$ pontok távolságát értjük, melyekre $x \in x' + [0, 1)^d$, $y \in y' + [0, 1)^d$. A pontok távolságára úgy gondolunk, mint az ahhoz szükséges idő, hogy a folyadék az egyik

pontból eljusson a másikba. Amennyiben F azonosan 0 a negatív félegyenesen, azaz nem engedünk meg negatív éleket, úgy a $(\mathbb{Z}^d, T(.,.))$ pár 1 valószínűséggel egy pszeudometrikus tér, ha pedig $F(0) > 0$, akkor 1 valószínűséggel metrikus tér. Az első áthaladási perkolációval kapcsolatban az elsődleges cél, hogy megértsük ezt a metrikát, ahogy az élek hossza egyre csökken, illetve ahogy minél inkább kimozdulunk a $\mathbb{Z}^d$ rácsról, ezzel egyre inkább közelebb hozva a modellt a valósághoz.
Jelölje $B(t)$ az origó középpontú, t sugarú gömböt $\mathbb{R}^d$-ben a T távolságfüggvény szerint, azaz legyen $B(t) = \{y \in \mathbb{R}^d : \ T(0, y) \le t\}$. Érdekes kérdés ezzel kapcsolatban, hogy vajon hogy néz ki egy ilyen gömb, pontosabban ha egyre nagyobb sugarú gömböket veszünk, létezik-e valamilyen határalakzat, amihez egyre inkább hasonlítanak a gömbök. Ha pedig előfordul, hogy létezik, akkor vajon mely alakzatok állnak elő az áthaladási idők valamely eloszlása mellett határalakzatként? A monográfiában, amivel foglalkoztam, alaposan körüljárták ezen kérdéseket. Ennek tárgyalása előtt azonban előbb érdemes egy alapvetőbb kérdéssel foglalkozni, nevezetesen megtudni, várhatóan mekkora lesz a távolság két egymástól távol eső pont között.

2. Az időkonstans

A fejezet alapkérdése, hogy mit mondhatunk $T(x, y)$-ról, ha $|x - y|_1 \to \infty$. Vajon konvergál valahova aszimptotikusan? A választ egy konkrét esetben a következő, alapvető tétel adja meg, mely egyszerű következménye Kingman híres szubadditív ergodtételének.

1. Tétel. *Jelölje e_1 az első koordinátavektort, és legyenek $t_1, ..., t_{2d}$ azonos eloszlású, független valószínűségi változók az élek közös eloszlásából. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(\min[t_1, ..., t_{2d}]) < \infty$. Ekkor létezik egy időkonstansnak nevezett $\mu(e_1) \in [0, \infty)$ érték, melyre*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T(0, n \cdot e_1)}{n} = \mu(e_1)$$

1 valószínűséggel és L^1-ben.

Az $\mathbb{E}(\min[t_1, ..., t_{2d}]) < \infty$ feltétel minden esetben szükséges, ha ugyanis nem teljesülne, akkor a Borel-Cantelli lemma szerint tetszőleges $C > 0$-ra 1 valószínűséggel teljesülne, hogy $\limsup_{n\to\infty} \frac{T(0,ne_1)}{n} > C$. Azonban, ha csak sztochasztikus konvergencia mellett szeretnénk egy időkonstanst, ahhoz nem szükséges feltenni.
Az időkonstans meghatározása egy nagyon nehéz feladat, de becsléseket azért tudunk mondani rá. Nyilvánvaló, hogy $\mu(e_1) \le \mathbb{E}(\tau_e)$, Hammersley és Welsh viszont belátták, hogy ha τ_e eloszlása nem triviális, akkor szigorú egyenlőtlenség áll fenn – ez már egy érdekesebb tény.

Emellett természetesen nem csak az első koordinátavektor irányában létezik időkonstans a feltételek mellett: minden racionális koordinátákkal leírt vektor irányára bizonyítható a fenti tétel. Sőt, a racionális irányok időkonstansai néhány alapvető dolgot is teljesítenek: $x, y \in \mathbb{Q}^d, c \in \mathbb{Q}$ esetén

- $\mu(x+y) \leq \mu(x) + \mu(y)$
- $\mu(cx) = |c| \cdot \mu(x)$
- μ invariáns $\mathbb{Z}^d$ origót fixen hagyó szimmetriáira
- μ egyenletesen folytonos és Lipschitz $\mathbb{Q}^d$ korlátos részhalmazain

Az utolsó megállapításból következik, hogy μ-nek egyértelműen létezik folytonos kiterjesztése $\mathbb{R}^d$-re.

Az időkonstanssal kapcsolatban az is adódó kérdés, hogy vajon hogyan viszonyulnak egymáshoz a τ_e különböző eloszlásaihoz tartozó időkonstansok, illetve mi történik vele, ha az eloszlást kicsit perturbáljuk. Ebben a kérdésben Cox és Kesten a következő eredményt érte el.

2. Tétel. *Legyen F_n a τ_e különböző eloszlásaihoz tartozó eloszlásfüggvények egy sorozata. Tegyük fel, hogy $F_n \to F$ gyengén. Ekkor $\lim_{n\to\infty} \mu_n(e_1) = \mu(e_1)$, ahol $\mu_n(e_1), \mu(e_1)$ jelöli az e_1 vektor időkonstansát az F_n, F eloszlásfüggvények eloszlásai mellett.*

Ez az eredmény nem elég erős ahhoz, hogy a határalakzat változásáról mondani lehessen valamit a segítségével, ha az élek eloszlását perturbáljuk, de a határalakzat extrém pontjaira garantál egyfajta folytonossági tulajdonságot.

3. A határalakzat

A $\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ időkonstans függvény segítségével már leírható a $B(t)$, praktikusabban a $\frac{B(t)}{t}$ gömb viselkedése $t \to \infty$ esetén. A fő eredmény Cox és Durrett híres alaktétele, mely pontosan meghatározza, mely esetekben létezik egy determinisztikus, konvex, kompakt határalakzat.

A tétel előkészítéséhez egy gyors kitérőt kell tennünk a kötésperkoláció fogalmához. Ez egy olyan modell, ahol a rács minden éle egymástól függetlenül p valószínűséggel nyitva van, $1-p$ valószínűséggel pedig zárva, áthaladni pedig csak a nyitott éleken lehet, így útösszefüggőségi komponensek keletkeznek. Kritikus valószínűségnek nevezik azt a p_c értéket, melynél nagyobb p valószínűségekre teljesül, hogy ha ekkora valószínűséggel van nyitva minden él, akkor 1 valószínűséggel lesz végtelen komponens. A $\mathbb{Z}^d$ rácshoz tartozó kritikus valószínűséget $p_c(d)$ jelöli, és szerepe lesz a kompakt határalakzat létezésének feltételeiben.

3. Tétel. *Legyen $\mathcal{M}_d$ azon, $[0,\infty)$-en értelmezett valószínűségi Borel-mértékek halmaza, melyekre a következők teljesülnek:*

- $\mathbb{E}(\min[t_1,...,t_{2d}]) < \infty$, *ahol* $t_1,...,t_{2d}$ *azonos eloszlású, független valószínűségi változók az adott eloszlásból*
- *az eloszlásfüggvényeikre* $F(0) < p_c(d)$ *teljesül .*

Ekkor minden $\nu \in \mathcal{M}_d$*-re létezik egy determinisztikus, konvex, kompakt* $\mathcal{B}_\nu \subset \mathbb{R}^d$ *halmaz, melyre minden* $\varepsilon > 0$*-ra*

$$\mathbb{P}\left((1-\varepsilon)\mathcal{B}_\nu \subset \frac{B(t)}{t} \subset (1+\varepsilon)\mathcal{B}_\nu \text{ elég nagy } t\text{-re}\right) = 1.$$

Sőt, $\mathcal{B}_\nu$ *szimmetrikus* $\mathbb{R}^d$ *tengelyeire, és a belseje nem üres.*

Ez a tétel nagyon kielégítő választ ad a határalakzattal kapcsolatosan felmerülő legtermészetesebb kérdésekre. Emellett az értékét növeli, hogy a benne megjelenő feltételek szükségessége is megmutatható.

Amennyiben az $F(0) < p_c(d)$ feltétel nem teljesül, úgy a 0 áthaladási időkre nyitott, a pozitív áthaladási idejű élekre pedig zárt élekként tekintve definíció szerint lesz végtelen, 0 áthaladási idejű élek által meghatározott komponens. Ekkor pedig $\frac{B(t)}{t}$ nem lesz korlátos, így kompakt sem.

Ha pedig az első feltétel nem teljesül, akkor a korábbiakhoz hasonlóan tetszőleges $C > 0$-ra 1 valószínűséggel lesz végtelen sok $x \in \mathbb{Z}^d$, melyre $\frac{T(0,x)}{|x|} > C$, így nem lesz határalakzat. Cox, Durrett és Kesten azonban bebizonyította, hogy a $T(u,v)$ távolságok mint valószínűségi változók módosíthatóak úgy ebben az esetben, hogy közel maradjanak az eredetihez, de ezekre már létezzen határalakzat. Ennek az alapötlete az, hogy veszünk egy nagy M-et, amire $F(M)$ már nagyon közel van 1-hez, és két pont távolságát a pontokhoz közel levő, $\tau_e \leq M$ élek segítségével definiáljuk.

A tétel ismeretében felmerül a kérdés, hogy vajon mely konvex, kompakt, a tengelyekre szimmetikus $\mathbb{R}^d$-beli halmazok állnak elő határalakzatként. Számomra meglepő fordulat, hogy ez egy teljesen nyitott kérdés. Azonban, ha nem várjuk el az élek áthaladási idejeitől, hogy független, azonos eloszlású változók legyenek, akkor minden olyan nemüres, konvex, kompakt halmaz, mely szimmetrikus a tengelyekre, előáll határalakzatként, ezt Häggström és Meester bizonyították.

4. Metrikus terek konvergenciája és a határalakzat

Az első áthaladási perkoláció modellje egy véletlen (pszeudo)metrikus tér. A cikkben definiálják metrikus terek távolságát, ennek segítségével pedig konvergenciáját, mely egyrészt nagyon szép, másrészt, ami még érdekesebb, hogy a határalakzat létezéséről szóló tétel megfogalmazható metrikus terek konvergenciájával is.

Egy (X, d) metrikus tér $S \subseteq X$ részhalmazát ε-sűrűnek nevezzük, ha X minden pontja S ε-környezetében van. Egy (X_1, d_1) és (X_2, d_2) metrikus tér között $R \subset X_1 \times X_2$ ε-reláció, ha R X_1-re és X_2-re vett vetülete is ε-sűrű, illetve $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R$ esetén $|d_1(x_1, y_1) - d_2(x_2, y_2)| < \varepsilon$. (X_1, d_1) és (X_2, d_2) metrikus terek Gromov-Hausdorff távolságán azon ε-ok infimumát értjük, melyekre a két tér valamely $R \subset X_1 \times X_2$-re ε-relációban áll egymással. Ennek a definíciónak az a nagy hátránya, hogy egy kompakt és egy nem korlátos metrikus tér távolsága mindig végtelen. Egy trükkös módosítással azonban ezen lehet segíteni. Egy (X, d) metrikus tér és $x \in X$ esetén nevezzük (X, d, x)-et pontozott metrikus térnek az x bázisponttal. Ekkor az $((X_n, d_n, x_n))_{n \geq 0}$ pontozott metrikus terek egy sorozata konvergál az (X, d, x) pontozott metrikus térhez, ha minden $r > 0$-ra $\overline{B}(x_n, r)$ sorozat (az indukált metrikákkal) a Gromov-Hausdorff metrikában konvergál $\overline{B}(x, r)$-hez.

Visszatérve az első áthaladási perkolációhoz, hozzuk létre a következő (pszeudo)metrikus tereket. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ az a valószínűségi mező, amiből az élek eloszlása származik. Minden $\omega \in \Omega$-ra vegyük a következő sorozatot:

$$(X_n, d_n(x, y)) := \left(\frac{1}{n} \mathbb{Z}^d, \frac{T(nx, ny)}{n} \right).$$

Ezek szemléletesen az eredeti (pszeudo)metrikus terek átskálázva és normalizálva. Vegyük továbbá $\mathbb{R}^d$-t a $d(x, y) := \mu(x - y)$ metrikával, ahol $\mu(x)$ az időkonstans függvény. Ekkor a határalakzatról szóló tétel a következőképpen mondható ki.

4. Tétel. *Tegyük fel, hogy $F(0) < p_c(d)$, és valamely $\alpha > 0$-ra $\int e^{\alpha x} d\nu < \infty$. Ekkor a $(X_n, d_n, 0)$ sorozat konvergál a pontozott Gromov-Hausdorff konvergencia szerint $(\mathbb{R}^d, \mu, 0)$ pontozott metrikus térhez 1 valószínűséggel.*

Ez a második megközelítés talán előbb vezet majd újabb eredményekhez a határalakzat témakörében, mint az eredeti.

Hivatkozások

[1] A. Auffinger, M. Damron, J. Hanson, *50 years of first passage percolation*, 2016. https://arxiv.org/pdf/1511.03262.pdf