Szemerédi Levente
szelev@student.elte.hu

Egyéni kutatómunka 1 beszámoló

Az Egyéni kutatómunka 1 nevű kurzus keretében néhány perkolációelméletben előforduló kérdést vizsgáltam, melyet a következő félévben is folytatni szándékozok.

A beszámoló leadási határidejének hetén megtaláltam a leginkább vizsgált kérdésre a választ az egyik cikkben. Ettől függetlenül a dokumentum jelentős része e felismerés figyelem kívül hagyásával készült.

Budapest, 2021. december

Szemerédi Levente

1. Bevezetés

Hagyományosan a perkolációelméletben speciális véletlen terekben előforduló nagy összefüggő komponenseket vizsgálnak. Ezekben közös elem, hogy a keresett struktúra előfordulási valószínűsége a véletlen tér definiáló paramétereinek függvényében egy éles fázis-átmeneten esik át. Viszont azt, hogy mely paraméterértéknél történik ez az átmenet, gyakran nem ismert pontosan: már abban az egyszerűnek tűnő esetben sem, amikor a d-dimenziós kockarácsot vizsgáljuk. Egy ilyen jellegű kritikus érték körüli viselkedés megértéséhez, illetve meghatározásához fogtam neki. A továbbiakban részletezem a problémafelvetést, vázolom, milyen irányokban indultam el, illetve néhány eredményt is közlök.

Kutatásom Ducan, Kahle és Schweinhart [1] írásából indult ki, speciálisan annak a 2020. decemberi verziójából - azóta már frissítették. A cikkükben definiálták a plakett perkolációt a tóruszon, ami különböző variációi közti egyenlőtlenségeket, valamint dualitást bizonyítottak, amiből sikeresen kiszámították a középső dimenzióhoz tartozó kritikus valószínűség értékét. Az viszont nyitva maradt, hogy mit lehet mondani a többi dimenzióhoz tartozó kritikus valószínűségről. Az irány, aminél nekiindultam a kérdésnek annak megértése, hogy hogyan viselkedik a tér egy ilyen kritikus valószínűség kis környezetében: ha ezt jól megértjük, hátha könnyebb meghatározni, hogy ez a viselkedés hol történik, mintsem egyből a keresett értéket.

Elindulásnak annak megvizsgálását választottam, hogy mi történik, ha a 'nagy tér' dimenziója 3, és az 1-dimenzióhoz tartozó kritikus értéket keressük. A félév során végig ennél a kérdésnél maradtam.

Tehát a továbbiakban a következő perkolációs modellről lesz szó:

1.1. Definíció. Adott $p \in [0, 1]$ és N pozitív egész szám esetén legyen $S_{p,N}$ az az 1 dimenziós CW-komplexus, mely 0-cellái a $\mathbb{Z}^3/(N\mathbb{Z})^3$ pontok, az 1-cellák pedig a 'tóruszrács' 1-cellái, de mindegyiket (egymástól fügetlenül) p valószínűséggel szerepeltetünk, $1 - p$-vel nem.

1.2. Megjegyzés. Tehát az előbb definiált $S_{p,N}$ egy $3N^3$ darab i.i.d. indikátor eloszlás szorzatán értelmezett CW-komplexus értékű valószínűségi változó - ezt nem fogom a továbbiakban ennyire kihangsúlyozni, de amikor a későbbiekben azt írom, hogy $S_{p,N}$, akkor nem egy konkrét térre kell gondolni.

Az előbb definiált $S_{p,N}$ standard módon beágyazható a 3-tóruszba: a $\mathbb{Z}^3/(N\mathbb{Z})^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3/(N\mathbb{Z})^3$ beágyazáson megszorításaként. Ez a $\phi : S \hookrightarrow \mathbb{T}^3$ indukál egy $\phi_* : \mathrm{H}_1(S) \to \mathrm{H}_1(\mathbb{T}^3)$ leképezést az 1-homológiákon. Ezzel kapcsolatban több kérdés is felmerülhet, ezek közül a következőket fogjuk vizsgálni:

- $\phi_* \neq 0$?
- ϕ_* képében benne van valamelyik standard generátor?
- ϕ_* képében van-e (kettő vagy) három független elem?
- ϕ_* szürjektív?

Ezekhez a kérdések megfeleltethetők eseményeknek, így értelmes a választ ezek valószínűségeként megadni. Ezeket az eseményeket rendre K_1, K_2, K_3, K_4-ként fogom nevezni. Az derül ki, hogy ezekhez tartozik valamiféle átmenet, ami remélhetőleg éles, azaz valamely érték alatt N-nel végtelenbe tartva az esemény előfordulási valószínűsége 0-hoz tart, felette viszont 1-hez.

Ahogy a bevezető fejezetből is látszik, több valószínűségi mezővel is fogunk számolni, de a követhetőség kedvéért a számolásoknál csak azokat az indexeket fogom kiírni, mely az adott gondolatmenet során változik.

2. Kritikus valószínűségek

A továbbiakhoz szükséges, hogy a 1.1 Definícióban megadott $S_{p,N}$ teret egy másik megközelítésben is lássuk.

2.1. Definíció. Legyen adott $p \in [0,1]$ és N pozitív egész szám. Vegyük az $N \times N \times N$-es 3-tóruszrácsot - azaz melynek csúcsai $\mathbb{Z}^3/(N\mathbb{Z})^3$-nek felelnek meg, majd a rács minden élére függetlenül írjunk rá egy a $[0,1]$ intervallumból egyenletes eloszlással választott számot. Ezt a felcímkézett tóruszrácsot T_N-nel fogom jelölni. Ekkor $S'_{p,N}$ az a CW-komplexus, mely 0-cellái T_N csúcsai, 1-cellái pedig T_N azon élei, melyekre legalább p került.

Világos, hogy $S_{p,N}$, illetve $S'_{p,N}$ ugyanakkora valószínűséggel vesznek fel adott értéket, viszont értelmezési tartományuk másik valószínűségi mező. Mivel mindig csak az ezen terekből visszaszámolt események valószínűségeivel foglalkozunk, így az állításokat elég a kétféle modell egyikére igazolni - amelyikre éppen egyszerűbb.

A most következő bizonyításokhoz szükségünk lesz még a növő esemény fogalmára, illetve a Harris-féle korrelációs egyenlőtlenségre.

2.2. Definíció. Legyen H $S_{p,N}$ lehetséges értékeinek egy halmaza. Ekkor H *növő*, ha valahányszor X és Y $S_{p,N}$ lehetséges értéke és $X \in H$, valamint $X \subset Y$, akkor $Y \in H$. Ebben az esetben azt az eseményt, ami a térképzésnél H őse, *növő esemény*nek hívjuk.

A definícióból világos, hogy a vizsgált kérdésekhez tartozó K_1, K_2, K_3, K_4 események mindegyike növő, ugyanis újabb élek megjelése nem csökkenti ϕ_* képét.

2.3. Tétel (Harris-egyenlőtlenség [2])**.** *Legyenek $A_1, \ldots, A_k$ növő események. Ekkor*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \geq \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i).$$

Mostmár nekikezdhetünk a kritikus valószínűségek vizsgálatának. Először nézzük meg, hogy kis valószínűség-paraméter esetén a vizsgált események kis valószínűséggel következnek be, nagy érték esetén pedig naggyal. Speciálisan igaz a következő

2.4. Állítás. *Legyen N rögzített pozitív egész, A a K_1, K_2, K_3, K_4 események valamelyike, valamint $0 \leq p \leq q \leq 1$. Ekkor*

$$\mathbb{P}_p(A) \leq \mathbb{P}_q(A).$$

Bizonyítás. Minden rögzített T_N felcímkézett tóruszrács esetén igaz, hogy a belőle származtatott CW-komplexus a p értéknél rész CW-komplexusa a q értéknél kapott CW-komplexusnak. Ez a tartalmazási irány a ϕ_* általi képekre is fennáll, amiből adódik az állítás. □

Tehát mostmár tudjuk, hogy a $K_1, \ldots, K_4$ események $S_{0,N}$-ben 0, $S_{1,N}$-ben 1 valószínűséggel következnek, közben pedig az első paraméterértéket növelve a vizsgált események bekövetkezési valószínűsége is nő. Ez alapján értelmes a következő

2.5. Definíció. Legyen A valamely ϕ_*-ból kiolvasható esemény, melyre a 2.4 állítás teljesül. Ekkor A *alsó kritikus valószínűsége*:

$$p_c^A = \sup\left\{p \mid \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_{p,N}(A) = 0\right\},$$

hasonlóan a *felső kritikus valószínűsége*:

$$\hat{p}_c^A = \inf\left\{p \mid \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_{p,N}(A) = 1\right\}$$

A vizsgálat ezen alsó, illetve felső kritikus valószínűségek közti kapcsolatok felderítésére irányult. A legelső megfigyelések az események közti logikai kapcsolatokóbl adódik:

2.6. Állítás. *Legyenek A és B ϕ_*-ból kiolvasható események úgy, hogy $A \subset B$. Ekkor*

$$p_c^B \leq p_c^A$$

és

$$\hat{p}_c^B \leq \hat{p}_c^A.$$

□

Az előző állítás a K_1, illetve K_4-hez tartozó kritikus valószínűségekhez ad meg egyenlőtlenségeket, ugyanis $K_4 \subset K_i \subset K_1$ teljesül $i = 1, \ldots, 4$ esetén.

A vizsgált modellekben $H_1(\mathbb{T}^3)$ három standard generátora szimmetrikus, úgyhogy ha a modell paramétere meghaladja $\hat{p}_c^{K_2}$-at, azaz egy valószínűséggel van egy generátor, akkor a többi is megjelenik egy valószínűséggel, így K_3 és K_4 is teljesül. Azaz $\hat{p}_c^{K_3} \leq \hat{p}_c^{K_2}$ és $\hat{p}_c^{K_4} \leq \hat{p}_c^{K_2}$. Ezt összevetve az előző állítás következményével kapjuk, hogy $\hat{p}_c^{K_2} = \hat{p}_c^{K_4}$.

3. Szimulációs eredmények

Az előző részben bemutattam, hogy milyen egyenlőtlenségek vannak az egyes vizsgált kritikus valószínűségek közt. Felmerül viszont az a kérdés is, hogy mik konkrétan ezek az értékek. A remény az, hogy mind meg fognak egyezni.

Ehhez első lépésként készítettem egy számítógépes szimulációt, hogy megsejtsem, mennyi lehet a keresett kritikus valószínűség. A program generált egy felcímkézett tóruszrácsot, amin logaritmikus kereséssel közelítette a kritikus értéket. $N = 60$-nál, a $[0.2, 0.3]$ intervallumban 10 iteráció után kapott adatsor (144 adatból) a Kolmogorov-Szmirnov próba szerint nem különbözik jelentősen egy normális eloszlásból származótól ($D = 0.04307$, $p = 0.9415$) 0.25008-as várható értékkel. Többféle paraméterezés esetén is hasonló eredményt kaptam, így a sejtésem az, hogy a kritikus érték nagyjából $1/4$.

Mivel az $1/4$ egy meglehetősen szép érték lenne egy kritikus valószínűségre, így futtattam szimulációt nagyobb (4-dimenziós) tóruszrácson is. A dimenzió növelésével a számítások már meglehetősen lassan mentek, de azt kaptam, hogy (ugyanerre a kérdésre) itt a kritikus valószínűség valahol a $[0.161, 0.163]$ intervallumban lesz, ami azt sugallja, hogy ha van olyan Laurent-sor, ami előállítja a dimenzióból ezt az értéket, az nem $1/(2d)$, $1/(d+1)$ vagy valami hasonló egyszerűségű sor lesz. Ettől függetlenül abba az irányba fordultam, hogy mi történik $1/4$ környékén - később kiderül, hogy a valódi érték kicsit kisebb. A szimulációkból az is kiderült (minden futtatásnál így alakult), hogy amikor a homológiákon indukált leképezés nem triviális, akkor már a standard generátorok is megjelentek.

Szemerédi Levente
szelev@student.elte.hu

4. További gondolkozás irányai

A szimulációk elemzése után elkezdem elméleti szempontból vizsgálni a kérdést - azt szem előtt tartva, hogy valahogyan az 1/4-et kellene behozni. Több módon is nekifutottam a kérdésnek, lényegében mind a tóruszrács valamilyen feldarabolásán alapult: vékonyabb sávokra osztani a tóruszt, valahogy felkockázni, egyre nagyobb kockákból létrehozni. Ezek egyikével sem tudtam eredményre jutni.

Az egy hasznosnak tűnő észrevétel volt, hogy annak a kritikus valószínűségével, hogy egy rögzített kis területű részen megy át hurok, lehet becslés adni a vizsgált kritikus valószínűségekre.

Szintén fontos tétel a Menshikov-egyenlőtlenség:

4.1. Tétel (Menshikov-egyenlőtlenség[2]). *$\mathbb{Z}^d$-n végezzünk bond perkolációt. Legyen ennek a kritikus valószínűsége p_c. Ekkor ha $p < p_c$, akkor valamely $\kappa > 0$-ra annak az esélye, hogy az origó össze van kötve $[-M, M]^d$ peremével, legfeljebb $e^{-\kappa M}$.*

Ami tétel felfedezését már említettem a bevezetőben, [2] 6. fejezetében van, és azt mutatják meg, hogy $p_c^{K_1} \leq p_c \leq \hat{p}_c^{K_4}$, ahol p_c a $\mathbb{Z}^3$ bond perkolációjának kritikus valószínűsége (ami valahol $0,2485$ és $0,2490$ közt van [3] szerint).

5. Folytatási tervek

Folytatásként jelenleg két irányt látok: egyrészt a fentiekben leírt kritikus valószínáségek közti további kapcsolatok felkutatása, másrészt a magasabb homológiákon indukált leképezések vizsgálatát (immár nem három dimenzióban).

Hivatkozások

[1] Paul Duncan, Matthew Kahle, and Benjamin Schweinhart. n.d. “Homoological Percolation on a Torus,” 34.

[2] Harris, T. E. 1960. “A Lower Bound for the Critical Probability in a Certain Percolation Process.” Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 56 (1): 13–20. https://doi.org/10.1017/S0305004100034241.

[3] Ball, N. 2014. “Rigorous Confidence Intervals on Critical Thresholds in 3 Dimensions.” Journal of Statistical Physics 156 (3): 574–85. https://doi.org/10.1007/s10955-014-1018-7.