CSAVART KOSZORÚSZORZATOK RÉSZCSOPORTHÁLÓI

KŐRÖSI ÁKOS, PIGLER DONÁT
TÉMAVEZETŐ: PÁLFY PÉTER PÁL

Bevezetés

Nagyvonalúan azt is mondhatnánk, hogy a kutatásunk kiinduló kérdése az univerzális algebra egy nyílt problémája volt, nevezetesen: igaz-e, hogy minden véges háló izomorf egy véges algebra kongruenciahálójával? Valójában Pálfy és Pudlák 1980-ban már megmutatták ([3]), hogy ez a kérdés ekvivalens ennek csoportelméleti megfogalmazásával:

Kérdés. Igaz-e, hogy minden véges háló izomorf egy véges csoport részcsoporthálójának intervallumával?

Vagyis a két kérdés ugyanakkor igaz, illetve hamis. Ez a probléma bár sokak érdeklődését felkeltette, azóta is megoldatlan. 1999-ben azonban Börner ([1]) ismét egy fokkal megközelíthetőbbé tette, ugyanis az általános csoportelméleti kérdést visszavezette két speciális csoport esetére. Ehhez azonban előbb érdemes ezeket definiálnunk.

Definíció. *Egy G csoportot* ***majdnem egyszerűnek*** *nevezünk, ha létezik olyan $T \leqslant G$ egyszerű részcsoportja, hogy $C_G(T) = 1$.*

Más szóval olyan $T \leqslant G$ egyszerű részcsoport, hogy $G \leqslant \mathrm{Aut}(G)$.

A másik – az elkövetkező tétel szempontjából – "érdekes" csoport a csavart koszorúszorzat, amely definíciója bár nehezen emészthető, a kutatás során azonban szerencsére elég volt egy a gyakorlatban lényegesen könnyebben átérthető formában tekinteni ezen csoportokra, amelyet majd később bemutatunk.

A csavart koszorúszorzat definiálásához szükségünk van két véges csoportra, D-re (domain) és T-re (target), illetve egy $\varphi : D_0 \leqslant D \to \mathrm{Aut}(T)$ homomorfizmusra. Osszuk fel D-t D_0 szerinti jobboldali mellékosztályok diszjunkt uniójára: $D = D_0x_1 \cup \ldots \cup D_0x_m$, illetve legyen

$$\mathrm{Sdp}(D_0, \varphi) = \{f : D \to T \mid f(ax_i) = \phi_a(t_i),\ a \in D_0,\ t_i \in T(i = 1, \ldots m)\}$$

Ez ellenőrizhetően egy szubdirekt szorzat $T^D = T \times \ldots \times T$-ben (ahol T-t $|D|$-szer szorozzuk önmagával), vagyis $\mathrm{Sdp}(D_0, \varphi)$ T^D bármely komponensére való vetítése szürjektív. Sőt az is igaz, hogy ez a szubdirekt szorzat D-invariáns, ha D a természetes eltolással hat T^D-n, vagyis $f \in T^D$-re (mint $f : T \to D$ függvényre) $f^d(x) = f(xd^{-1})$, ahol $x, d \in D$.

Definíció. *T és D csoportok $D_0 \leqslant D$-ra és $\phi : D_0 \to \mathrm{Aut}(T)$-re vonatkozó **csavart koszorúszorzatának** mondjuk a*

$$\mathrm{Twr}(D, T, D_0, \varphi) = \mathrm{Sdp}(D_0, \phi) \rtimes D$$

szemidirekt szorzatot.

A továbbiakban az $\mathrm{Int}(H, G)$ jelölést használjuk G részcsoporthálójának $H \leqslant G$ fölé eső részhálójára, vagyis a H és G közötti intervallumra.
Ezek után már megfogalmazható Börner tétele:

Tétel. *Minden véges háló izomorf egy véges csoport részcsoporthálójának intervallumával akkor és csak akkor, ha a következők egyike igaz:*

(a) Minden véges (egynél több elemet tartalmazó) háló izomorf egy majdnem egyszerű G csoport $\mathrm{Int}(H, G)$ intervallumával, ahol $H \leqslant G$ magtalan (azaz $\bigcup_{g \in G} g^{-1}Hg = 1$) részcsoport.
(b) Minden véges (egynél több elemet tartalmazó) háló izomorf egy $G = \mathrm{Twr}(T, D, D_0, \varphi)$ csavart koszorúszorzat $\mathrm{Int}(D, G)$ intervallumával, ahol T nemkommutatív véges egyszerű csoport, D véges csoport, $D_0 < D$ részcsoport és $\varphi : D_0 \to Aut(T)$-re igaz, hogy $\varphi(D_0) \geqslant \mathrm{Inn}(T)$.

Az általános kérdésre a matematikai közvélemény negatív választ vár, és mint számos véges csoportelméleti probléma esetén, úgy itt is kívánatos lenne, ha a majdnem egyszerű csoportokra tudnánk visszavezetni, immár a tétel segítségével. Szerencsére a hálók felől tekintve egyszerűbben is meg tudjuk ragadni a csavart koszorúszorzatokat, ugyanis igaz a következő

Állítás. *Legyen T egy nemkommutatív véges egyszerű csoport, továbbá $D_0 \leqslant D$, $\varphi : D_0 \to \mathrm{Aut}(T)$, hogy $\varphi(D_0) \geqslant \mathrm{Inn}(T)$. Ekkor $\mathrm{Sdp}(D_0, \varphi)$ D-invariáns részcsoportjainak hálója izomorf φ összes D-beli D_0-t tartalmazó részcsoportra való kiterjesztésének duális hálójával egy kiegészítő legfelső elem hozzávételével (ez felel meg az eredeti hálóban a triviális részcsoportnak).*

Kutatási beszámoló

A kutatás során a csavart koszorúszorzat segítségével igyekeztünk minél előremutatóbb részcsoporthálókat konstruálni, figyelembe véve a legkisebb (elemszámú) olyan példákat is hálókra, amelyekhez ma még nem ismert hozzájuk tartozó részcsoportháló-intervallum. (W. DeMeo két hételemű kivétellel minden legfeljebb hételemű hálóra talált ilyen reprezentációt.) A keresést meghatározó másik irány a példák konstruálása során a szimmetrikus csoportok direkt szorzatainak vizsgálata volt. A kiindulási alapként szolgáló Pálfy cikkben ([2]) ugyanis egy kétkomponensű szorzat adta az egyik "érdekes" részcsoporthálót (ld. Example 2.7). Elsőként megvizsgáltuk, hogy mi történik, ha a konstrukció egyszerű általánosításaként több komponens szorzatát vesszük, azonban az így keletkező hálók túlságosan szimmetrikusak voltak ahhoz, hogy a még kivételes hálókra megfelelő intervallumot szolgáltassanak. Így olyan konstrukciókra tértünk át, ahol az ilyen típusú direkt szorzatokat szemidirekten beszorozzuk egy másik csoporttal, mely valamilyen módon "cserélgeti" a komponenseket. Rövid vizsgálódás után rájöttünk, hogy ha a direkt szorzat minden komponensén hatunk (tehát mindahány koordinátát cserélgetjük), akkor bár a keletkező hálók elemszáma nő, a kiküszöbölendő szimmetriái megmaradnak, ezért a szemidirekt hatást csak bizonyos koordinátákra szorítottuk meg.

Az ilyen típusú konstrukció már a legkisebb értelmes $(S_n \times S_n \times S_n) \rtimes Z_2$ esetben is óriási részcsoporthálót ad. Ezt a kutatás során meghatároztuk, de itt helyszűke miatt az $(S_n \times S_n \times A_n) \rtimes Z_2$ esetet prezentáljuk, ami már jóval áttekinthetőbb hálót származtat.

Formálisan tehát az alábbi kérdéssel foglalkozunk. Tekintsük a $G = (S_n \times S_n \times A_n) \rtimes Z_2$ csoportot, ahol Z_2 generátoreleme (g) az első két koordináta cseréjével hat az $S_n \times S_n \times A_n$ csoporton. Ebben a szorzatban tekintsük az $(a, a, a, 1)$ $(a \in A_n)$ alakú elemekből álló "diagonális" D_0 részcsoportot. Képezzük a természetesen adódó $\varphi : D_0 \to S_n$ homomorfizmust, melyet az $(a, a, a, 1) \mapsto a$ leképezési szabály ad meg. Kérdésünk tehát, hogy φ kiterjesztései G részcsoportjaira milyen hálót szolgáltatnak.

Ehhez először azt határozzuk meg, hogy G részcsoporthálójának a D_0 feletti (azt tartalmazó részcsoportokból álló) intervalluma hogyan néz ki.

Ebben az alábbi általános csoportelméleti megfontolás segít: először tekintsük az $N = A_n \times A_n \times A_n \times \{1\}$ részcsoportot. Látható, hogy ez G-nek normálosztója. Ekkor bármely $H \leq G$ részcsoportra:

$$H \cap N \leq H \leq N_G(H \cap N)$$

Az első tartalmazás magától értetődő, a másodiknál is világos, hogy H normalizálja önmagát, és persze N-et is (hiszen azt az egész G normalizálja), így ezek metszetét is.

Ezt a megfigyelést úgy fogjuk felhasználni, hogy meghatározzuk, milyen részcsoportok fordulhatnak elő $H \cap N$ alakban, és mik a normalizátoraik. Ezek után már csak azt kell áttekintenünk, hogy milyen részcsoportok vannak az $N \cap H$ részcsoportok és azok normalizátorai közti intervallumokban – hiszen a fentiek szerint G összes részcsoportja előáll ilyen módon.

Itt a $H \cap N$ szerepét nyilván az $N = A_n \times A_n \times A_n$ részcsoportjai tölthetik be. Azonban vegyük észre, hogy mivel az A_n diagonálisát tartalmazó részcsoportokat vizsgálunk, azért minden koordinátára való vetítés szürjektív, tehát egy szubdirekt szorzattal van dolgunk. Ezeket a fentiekben meghatároztuk: tudjuk hogy lényegében izomorfak $(A_n)^m$

alakó csoportokkal, mégpedig úgy, hogy minden koordinátához megadunk egy automorfizmust $(A_n)^m$ valamelyik komponenséről.

Vegyük számba, hogy m mi lehet. Ha $m = 1$, akkor ez lényegében azt jelenti, hogy a második két komponens egy-egy automorfizmus szerint függ az elsőtől: tehát az $(a, \psi(a), \chi(a))$ alakú elemek alkotják. Azonban mivel csoportunknak tartalmaznia kell a diagonálist, azért ψ, χ egyaránt identikus kell hogy legyen. Ebben az esetben tehát maga a *diag* $A_n = \{(a, a, a)\}$ diagonális lehet csak a részcsoportunk.

Ha $m = 3$, akkor $A_n \times A_n \times A_n$-ben egy $A_n \times A_n \times A_n$-nel izomorf részcsoporttal van dolgunk, ami nyilván csak a teljes csoport lehet.

Maradt az $m = 2$ eset vizsgálata. Ebben az esetben van két független komponensünk a háromból, és a harmadik egy automorfizmussal függ a másik kettő valamelyikétől. Ám az előzőekben meggondoltakkal analóg módon ez az automorfizmus csakis identikus lehet, mert különben a részcsoport nem tartalmazná a diagonálist.

Azt kapjuk tehát, hogy az $A_n \times A_n \times A_n$ csoportnak a *diag* A_n-et tartalmazó részcsportjai éppen az alábbiak. Egyfelől, ilyen maga a *diag* A_n részcsoport (ez az $m = 1$ eset). Az $m = 2$ esetben a kapott karakterizációt az $\{(a, a, b) : a, b \in A_n\}$,$\{(a, b, a) : a, b \in A_n\}$, $\{(a, b, b) : a, b \in A_n\}$ részcsoportok elégítik ki. Végül $m = 3$ esetén megkapjuk a $A_n \times A_n \times A_n$ csoportot.

Ezzel befejeztük annak meghatározását, hogy milyen részcsoportok választhatók $H \cap N$ szerepére. Most az ilyen alakú részcsoportok normalizátorait kell meghatároznunk – immár a teljes $G = (S_n \times S_n \times A_n) \rtimes Z_2$ csoportban dolgozva.

Az $A_n \times A_n \times A_n \times \{1\}$ részcsoport normálosztó, tehát normalizátora az egész csoport.

Vizsgáljuk most az $\{(a, a, b, 1) : a, b \in A_n\}$ részcsoportot. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezt az $\{(s, s, c, z) : s \in S_n, c \in A_n, z \in Z_2\}$ alakú elemek normalizálják. Bővebb részcsoport azonban nem normalizálhatja, hiszen ha a részcsoportban van (s, p, c, z) alakú elem ahol $s \neq p$, akkor kereshetünk olyan $a \in A_n$ elemet, amelyet s és p más elembe konjugál (ilyen a nyilván létezik), és ekkor triviális számolás mutatja, hogy (s, p, c, z) nem normalizálja az $(a, a, b, 1)$ elemet tetszőleges b-re.

Most tekintsük az $\{(a, b, a, 1) : a, b \in A_n\}$ részcsoportot. Állítjuk, hogy ennek normalizátora az $\{(a, p, a, 1) : a \in A_n, p \in S_n\}$ részcsoport, Világos, hogy ez valóban normalizálja azt. Bizonyítandó még, hogy bővebb csoport viszont nem normalizálhatja. Ehhez számoljuk ki egy általános (s, p, c, z) elemmel való konjugálását egy részcsoportelemnek. Ez $z = 1$ esetén egyszerűen a koordinátánkénti konjugálás. Világos, hogy egy $z = 1$-s normalizátorelemben az első és a harmadik koordináta megegyezik, hiszen másképpen találhatnánk olyan $a \in A_n$ elemet, amelyet más elembe konjugálnak, és ez demonstrálná, hogy (s, p, c, z) nem normalizálja a tekintett részcsoportot. A $z = g$ esetben egyszerű számolás mutatja, hogy a konjugált egy általános (s, p, c, z) elemmel $(s^{-1}bs, p^{-1}ap, c^{-1}ac, 1)$ lesz. Nyilvánvaló, hogy a, b itt is megválaszható olymódon, hogy az első és második koordináta ne egyezzen az eredetiekkel, vagyis az ilyen elemek sem lehetnek a normalizátorban. Tehát valóban az $\{(a,p,a,1) : a \in A_n, p \in S_n\}$ részcsoport lesz itt a normalizátor.

Ugyanez a gondolatmenet átültethető az $\{(a,b,b,1) : a,b \in A_n\}$ részcsoport esetére is, ahol kapjuk, hogy az $\{(s,b,b,1) : s \in S_n, b \in A_n\}$ lesz a normalizátor.

Végül az $\{(a,a,a,1) : a \in A_n\}$ diagonális részcsoport normalizátorát keressük meg. Állítjuk, ez a *diag* $A_n \rtimes Z_2$ részcsoport, vagyis az (a,a,a,z) alakú elemek halmaza. Ezek valóban normalizálják a diagonálist. Ha adott egy (p,q,c,z) elem, ahol $p = q = c$ nem áll fenn, akkor van olyan $a \in A_n$, melyet különböző elemekbe konjugálnak, ekkor $(a,a,a,1)$ konjugáltja nem lesz a diagonálisban, vagyis az ilyen (p,q,c,z)-k nincsenek a normalizátorban. Persze $p = q = c$ csakis az A_n-ból kerülhet ki, mert c eleme A_n-nek. Ezért a normalizátor valóban *diag* $A_n \rtimes Z_2$.

Meghatároztuk tehát a $H \cap N$ alakú részcsoportok normalizátorait is. Most át kell tekintenünk, hogy hogyan néznek ki az egyes részcsoportok és normalizátoraik közé eső részcsoportháló-intervallumok.

Az $\{(a,b,b,1) : a,b \in A_n\}$ és $\{(s,b,b,1) : b \in A_n, s \in S_n\}$ pár, illetve az $\{(a,b,a,1)_a, b \in A_n\}$ és $\{(a,p,a,1) : a \in A_n, p \in S_n\}$ párok esetén könnyű dolgunk van. Itt ugyanis a két kisebb részcsoport indexe a tekintett normalizátorokban 2, azaz nem lehet valódi köztes részcsoport.

A másik két intervallum leírása kevésbé triviális, azonban egyszerű csoportelméleti meggondolásokkal ez is megkönnyíthető. Közismert csoportelméleti tény, hogy ha adott egy G csoport, és annak egy N normálosztója, akkor a G/N faktor részcsoportjai, illetve a G-beli, N-et tartalmazó részcsoportok bijektíven megfelelnek egymásnak. Ezen észrevételt kihasználva pontosan tudjuk hogy hány darab részcsoportot várunk az intervallumban, és milyen tartalmazásstruktúrával, ami lényegesen megkönnyíti a dolgunkat.

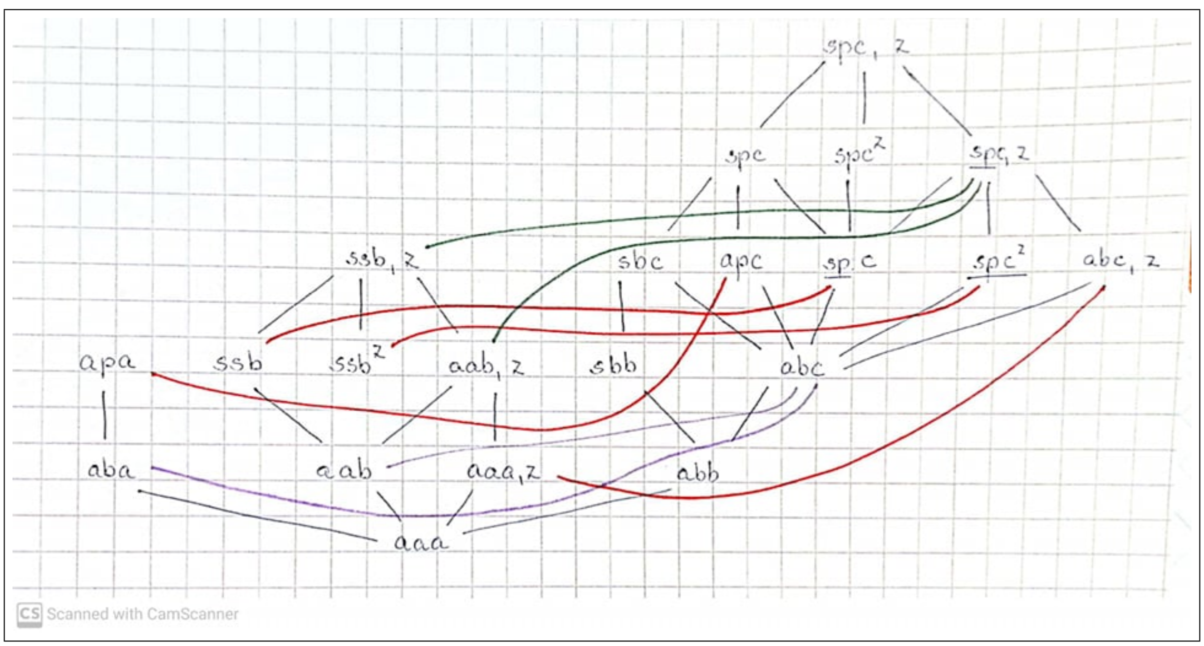
Tekintsük át elsőként az $\{(a,a,b,1) : a,b \in A_n\}$ részcsoport és annak $\{(s,s,b,z) : s \in S_n, b \in A_n\}$ normalizátora közötti intervallumot. A két csoport faktorcsoportja jól láthatóan $Z_2 \times Z_2$, ezért 3 részcsoportot várunk. Ezek könnyedén megtalálhatók: az egyik $\{(s,s,b,1) : s \in S_n, b \in A_n\}$, a második $\{a,a,b,z : a \in A_n, b \in A_n\}$ a harmadikat pedig olyan (s,s,b,z) elemek alkotják, ahol $z = 1$, ha s páros permutáció és $z = g$, ha páratlan.

Most határozzuk meg az $A_n \times A_n \times A_n$ részcsoport és normalizátora, azaz a teljes $(S_n \times S_n \times A_n) \rtimes Z_2$ csoport közötti intervallumot. A faktorcsoport itt a D_4 diédercsoport lesz - a koordinátánkénti Z_2 faktorokról ellenőrizhető, hogy ezt generálják. Tehát 8 köztes valódi részcsoportot kell találnunk (ennyi nemtriviális részcsoporttal rendelkezik D_4). Ezek rendezésstruktúráját is ismerjük. A köztes részcsoportok az alábbiak lesznek. Elsőként $\{(s,b,c,1) : s \in S_n, b \in A_n, c \in A_n$, másodikként $\{(a,p,c,1) : a \in A_n, p \in$

$S_n, c \in A_n$, harmadikként az olyan $(s, p, c, 1) : s \in S_n, p \in S_n, c \in A_n$ alakú elemek halmaza, ahol s, p-ről kikötjük, hogy azonos paritású permutációk. Negyedik az olyan $(s, p, c, z) : s \in S_n, p \in S_n, c \in A_n, z \in Z_2$ elemek halmaza, ahol egyfelől kikötjük, hogy s, p legyenek azonos paritású permutációk, másfelől ha s, p páros, akkor $z = 1$, és ha páratlanok, akkor pedig $z = g$. Ötödik az $\{(a, b, c, z) : a \in A_n, b \in A_n, c \in A_n, z \in Z_2\}$ csoport. Hatodik az $\{(s, p, c, 1) : s \in S_n, p \in S_n, c \in A_n\}$. Hetedik az olyan $(s, p, c, z) : s \in S_n, p \in S_n, c \in A_n, z \in Z_2$ elemek által alkotott részcsoport, ahol $z = 1$, ha sp páros permutáció és $z = g$, ha páratlan. Végül a nyolcadik részcsoport az olyan $(s, p, c, z) : s \in S_n, p \in S_n, c \in A_n, z \in Z_2$ elemekből áll, ahol s, p azonos paritású.

Megtaláltunk tehát nyolc darab részcsoportot, a fentebbi meggondolások szerint több nem lehet. Ellenőrizhető az is, hogy a részcsoportok valóban a D_4 hálójának megfelelően tartalmazzák egymást.

A felsorolt részcsoportok az alábbi háló szerint tartalmazzák egymást. Az 1. ábrán szereplő jelölések a számolások során alkalmazott konvenciók szerint értelmezendőek. Tehát a, b, c mindig A_n-beli elemeket jelölnek, s, p, q pedig S_n-belieket. A z jelöli a Z_n elemét (precízebben, hogy az a komponens nem triviális a csoport minden elemében), ha ez vesszővel elválasztva van a más elemek után feltüntetve, akkor azoktól függetlenül megválasztható, míg ha hatványkitevőbe van írva, akkor az első két koordináta paritásától függ a tárgyalt módon (az ábra föntről második sorában szereplő esetben a paritásszorzattól, minden más esetben az első két koordináta közös paritásától). Az aláhúzás azt jelöli, hogy az első két komponens paritásának meg kell egyezni a tekintett részcsoportban.

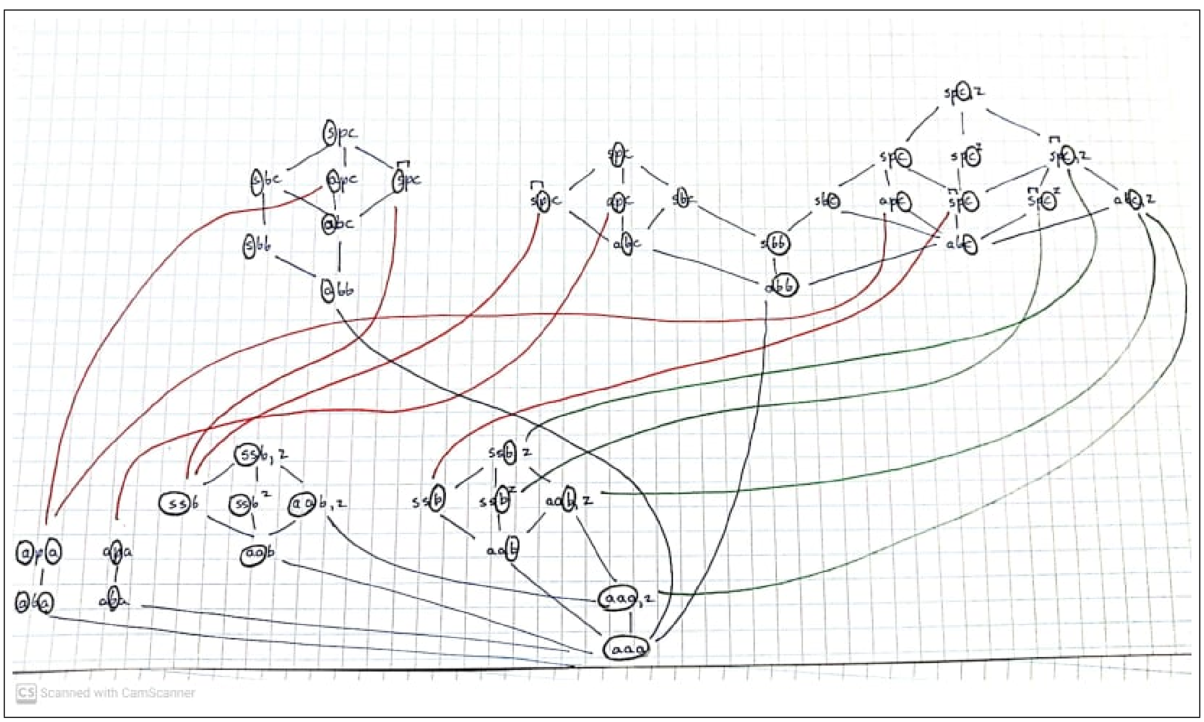


1. ábra. Az $\mathrm{Int}[D_0, G]$ részcsoportháló-intervallum

A részcsoportháló meghatározása után áttérhetünk annak vizsgálatára, hogy a kiinduláskor vett φ homomorfizmus (vetítés) mely részcsoportokra terjed ki és milyen módon. Ez nem nehéz feladat a részcsoportháló ismeretében. Egy kiterjesztésnek az (s, p, c, z) elemhez szükségképpen s, p, c valamelyikét kell rendelnie, különben nem lenne a φ kiterjesztése. Tekintsük az $(s, 1, 1, z)$, $(1, p, 1, z)$ és $(1, 1, c, z)$ alakú elemek képeit. Állítjuk, legfeljebb egy kivétellel az ilyenek mind a kiterjesztés magjában vannak. Valóban, tegyük fel, hogy két különböző osztályban is van magon kívüli elem, például az $(s, 1, 1, z_1)$, $(1, p, 1, z_2)$ osztályokban. Világos, hogy ehhez a két elemhez rendre s-et, és p-t kell rendelni (ha nem 1-et), hiszen úgy lesz a diagonálison vett vetítés kiterjesztése. Ám ekkor szorzatukhoz, amely a z_2 értékétől függően $(s, p, 1, z_1 z_2)$ vagy $(p, s, 1, z_1 z_2)$ alakú, az sp szorzatot kell rendelnünk, ami ellentmond annak, hogy a diagonálisról vett vetítést kiterjeszti a homomorfizmusunk.

Röviden tehát, a homomorfizmus csakis egy vetítés lehet az első három koordináta valamelyikére. Ám azt is vegyük észre, hogy amennyiben a részcsoport vetülete az utolsó koordinátára nemtriviális, akkor nem vetíthetünk az első két koordinátára, kivéve ha azok mindig egyenlők a tekintett részcsoportban. Valóban, ha az első két koordinátában állhatnak különböző elemek, és emellett a csoport tartalmaz olyan elemeket, melyek permutálják e két koordinátátát, akkor az első két koordinátára való vetítés nem lesz homomorfizmus.

Az nyilvánvaló, hogy minden más esetben a vetítések valóban homomorfizmust adnak.



2. ábra. A kiterjesztések hálója

Az itt tárgyaltak ismeretében már könnyen meghatározható a kiterjesztések által alkotott háló. Ez látható a mellékelt 2. ábrán. A jelölések hasonlók a részcsoportháló-nál használatkhoz, mindössze annyi változott, hogy aláhúzás helyett összekapcsolással jelöltük, ha az első két koordinátáról kikötjük, hogy egyező paritásúak legyenek. A megfelelő koordináta bekarikázásával jelöltük, hogy melyikre való vetítést tekintjük, ez persze több koordináta is lehet, ha az adott koordinátáták értéke mindig azonos a részcsoportban.

Hivatkozások

[1] F. Börner, *A remark on the finite lattice representation problem. In Contributions to General Algebra, 11* (Verlag Johannes Heyn, klagenfurt, 1999), 5-38.

[2] P. P. Pálfy, *Subgroups of Twisted Wreath Products. In C. Campbell, C. Parker, M. Quick, E. Robertson, & C. Roney-Dougal (Eds.), Groups St Andrews 2017 in Birmingham* , (London Mathematical Society Lecture Note Series, pp. 455-468) Cambridge: Cambridge University Press, (2019).

[3] P. P. Pálfy and P. Pudlák, *Congruence lattices of finite algebras and intervals in subgroup lattices of finite groups. In Algebra Universalis*, 11 (1980), 22-27.