Csavart koszorúszorzatok részcsoporthálói

Kőrösi Ákos, Pigler Donát

témavezető: Pálfy Péter Pál

2021. december 17.

Motiváció

Kérdés

Igaz-e, hogy minden véges háló izomorf egy véges csoport részcsoporthálójának intervallumával?

Tétel (Börner, 1999)

Minden véges háló izomorf egy véges csoport részcsoporthálójának intervallumával akkor és csak akkor, ha a következők egyike igaz:

1. Minden véges (egynél több elemet tartalmazó) háló izomorf egy majdnem egyszerű G csoport $\mathrm{Int}(H, G)$ intervallumával, ahol $H \leqslant G$ magtalan (azaz $\bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg = 1$) részcsoport.
2. Minden véges (egynél több elemet tartalmazó) háló izomorf egy $G = \mathrm{Twr}(T, D, D_0, \varphi)$ csavart koszorúszorzat $\mathrm{Int}(D, G)$ intervallumával, ahol T nemkommutatív véges egyszerű csoport, D véges csoport, $D_0 < D$ részcsoport és $\varphi : D_0 \to Aut(T)$-re igaz, hogy $\varphi(D_0) \geqslant \mathrm{Inn}(T)$.

Motiváció

- a kérdésre várt válasz: nem igaz
- jó lenne visszavezetni a problémát a majdnem egyszerű csoportok esetére

Állítás

Legyen T egy nemkommutatív véges egyszerű csoport, továbbá $D_0 \leqslant D$, $\varphi : D_0 \to \mathrm{Aut}(T)$, hogy $\varphi(D_0) \geqslant \mathrm{Inn}(T)$. Ekkor $\mathrm{Sdp}(D_0, \varphi)$ D-invariáns részcsoportjainak hálója izomorf φ összes D-beli D_0-t tartalmazó részcsoportra való kiterjesztésének duális hálójával egy kiegészítő legfelső elem hozzávételével (ez felel meg az eredeti hálóban a triviális részcsoportnak).

Saját kutatás: áttekintés

- Kutatásunk fő iránya "érdekes" kiterjesztéshálók konstruálása volt (távlati cél: eddig előállítatlan hálók előállítása; közös strukturális jellemzők felismerése).
- Többféle ötlet: szimmetrikus csoportok "megcsavart" direkt szorzata (ezt fejtjük ki a továbbiakban), PSL-csoportokon alapuló konstrukciók, további szimmetrikus csoportokat használó ötletek...
- Az előadás további részében az egyik érdekes konstrukció, az $(S_n \times S_n \times A_n) \rtimes Z_2$ csoport esetét tekintjük át.

A vizsgálandó probléma

- Csoportunk $G = (S_n \times S_n \times A_n) \rtimes Z_2$ lesz, ahol Z_2 generátoreleme az első két koordináta cseréjével hat.
- Kiinduló részcsoportnak a $D_0 = \{(a, a, a, 1)\}$ diagonálist választjuk.
- Kiinduló homomorfizmusunk a $\varphi : D_0 \to S_n$, melyet $(a, a, a, 1) \mapsto a$ ad meg.
- Feladatunk a φ homomorfizmus G részcsoportjaira vett kiterjesztései által alkotott háló megadása.

Stratégia

Először a G részcsoporthálójának D_0 feletti részét határozzuk meg, ennek ismeretében a kiterjesztésháló kiszámolása már egyszerű feladat lesz.

A részcsoportháló meghatározása I.

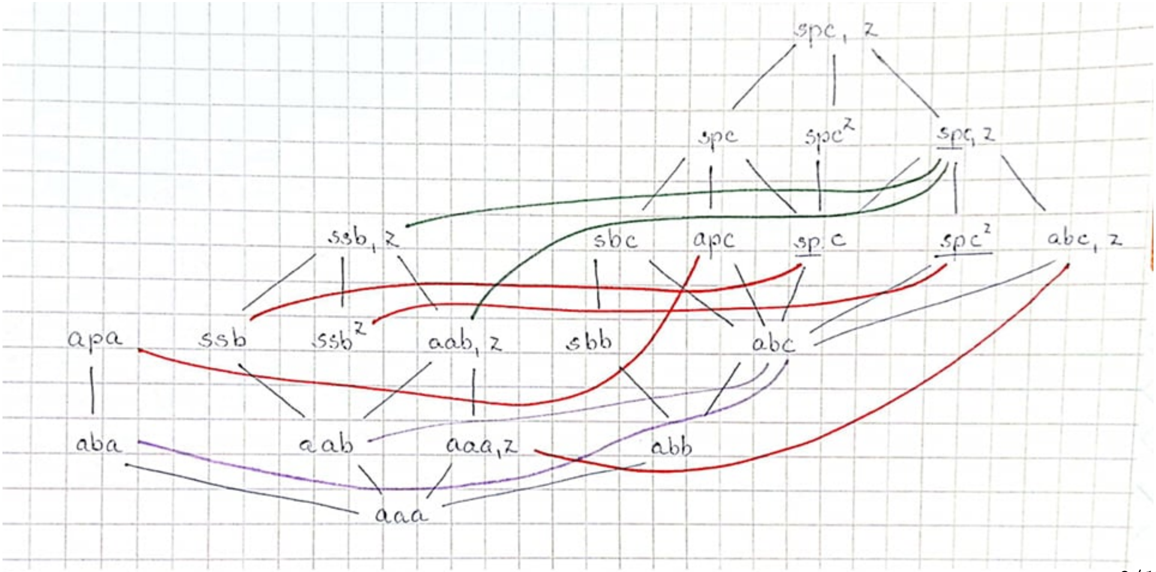
Összetett feladatnak tűnik, de néhány csoportelméleti trükkel jelentősen egyszerűsíthető.

- Vegyük észre, hogy $N = A_n \times A_n \times A_n \times \{1\}$ normálosztó G-ben.
- Általános csoportelméleti megfontolásokból: bármely $H \leq G$ részcsoportra: $H \cap N \leq H \leq N_G(H \cap N)$
- Elegendő tehát meggondolni, mi állhat elő $H \cap N$ alakban, majd áttekinteni mindegyikükre a $H \cap N$ és $N_G(H \cap N)$ közé eső csoportokat.
- Nyilván $H \cap N$ alakban éppen N részcsoportjai kaphatók meg (persze a diagonálist tartalmazókat tekintjük csak). Ezek hogyan nézhetnek ki?
- A diagonálist tartalmazó részcsoportok az N direkt szorzat szubdirekt részcsoportjai.
- A szubdirekt részcsoportok karakterizációját ismerjük.

A részcsoportháló meghatározása II.

- Miután megvannak a lehetséges $H \cap N$ részcsoportok, a normalizátoraikat könnyű kiszámolni.
- Korábbi meggondolásaink szerint az ilyen részcsoportok és normalizátoraik közti intervallumok tartalmaznak minden részcsoportot.
- Ismert, hogy egy A csoport és egy M normálosztója közti részcsoportok bijektíven megfelelnek A/M részcsoportjainak
- Ebből tudjuk, hogy egy-egy intervallumban hány részcsoportot várunk és milyen tartalmazásstruktúrában.
- A példánkban csak néhány nemtriviális intervallum van, ezekben heurisztikusan előállítottunk kellő számú részcsoportot.
- Összesítve adódik a keresett részcsoportháló.
- Hátravan a lehetséges kiterjesztések számbavétele.

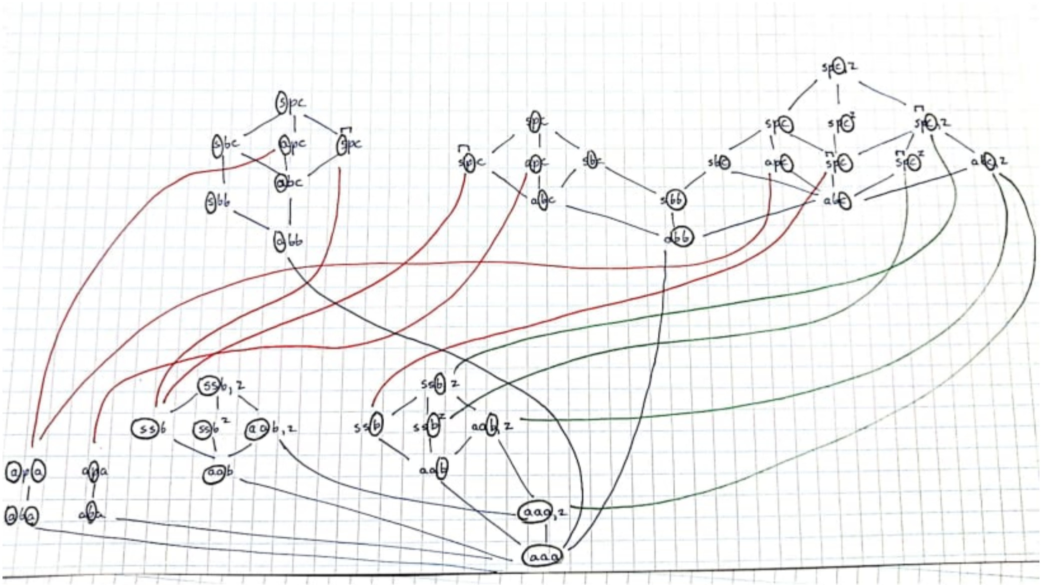
A részcsoportháló



A kiterjesztésháló kiszámítása

- Mivel az a $(a, a, a, 1) \mapsto a$ kiterjesztéseit vizsgáljuk, azért egy (s, p, c, z) alakú elemhez s, p, c valamelyikét rendelhetjük
- Meggondolható, hogy mindig ugyanazon koordinátát kell rendelnünk – tehát vetítésről van szó (persze egy részcsoportban azonosan egyenlő koordináták esetén van némi ambiguitás).
- Szintén ellenőrizhető, hogy amennyiben egy részcsoportban a negyedik koordináta nemtriviális, továbbá az első és második koordináta nem azonosan egyenlő, akkor azokra nem vetíthetünk (mert "elcsavaródnak").
- Viszont ha egy olyan vetítést veszünk, amit az előbbi kitétel nem tilt meg, akkor az homomorfizmust ad.
- Ezen meggondolások alapján már meghatározható a kiterjeszésháló

A kiterjesztésháló



Köszönjük a figyelmet!