ÖnállóKutatás

Mogyorósi Bálint
Konzulens: Dr. Zábrádi Gergely

December 2021

1 Alapok

Definíció 1 *Egy algebrai bővítése k-nak L, Galois bővítés, ha L azon elemei amik az Aut(L|k) hátásra fixen maradnak pontosan k. Ebben az esetben Aut(L|k) csoportot Gal(L|k)-val jelöljük, és az L k fölötti Galois csoportjának nevezzük.*

Lemma 1 *Legyen k egy test,* k_s *egy szeparábilis lezárás és* $L \subset k_s$ *egy résztest ami tartalmazzák. A következők ekkor ekvivalensek:*
1. *Az* $L|k$ *bővítés Galois.*
2. *Minden* $l \in L$ *elem k feletti minimálpolinomja tényezőkre bomlik L-ben.*
3. *Minden automirfizmusra* $\sigma \in$*Gal(*$k_s|k$*) igaz lesz, hogy* $\sigma(L) \subset L$

Tétel 1 *Galois elmélet főtétele*
Legyen $L|k$ *egy véges Galois bővítés G Galois csoporttal. Ekkor:*
$M \mapsto H :=$ *Aut(*$L|M$*) és* $H \mapsto M := L^H$
egy tartalmazást fordító bijekció az $L \supset M \supset k$ *és* $H \subset G$ *részcsoport. Az* $L|M$ *bővítés mindig Galois. Az* $M|k$ *bővítés akkor és csak akkor Galois, ha H normálosztója G-nek, ebben az esetben* $Gal(M|k) \cong G/H$

2 Galois fedések

Definíció 2 *Legyen G egy csoport ami folytonosan hat balról az Y topológikus teren. Ezt a hatásat egyenletesnek nevezzük ha* $\forall y \in Y$ *van olyan U nyílt környezete, hogy* $\forall g \in G$ *a gU nyílt halmazok páronként diszjunktak.*

Definíció 3 *Legyen p:* $Y \to X$ *egy fedés, ezek automorfizmusai Y mint egy tér X felett automorfizmusai, vagyis azon topologikus automorfizmusok amik kompatibilisek p projekcióval.Ezek egy csoportot alkotnak a kompozícióra nézve: Aut(Y|X).*

Megjegyzés 1 *Minden $x \in X$, Aut(Y|X) a $p(x)^{-1}$ fibrumot önmagára képezi, így $p(x)^{-1}$ el van látva Aut(Y|X) hatással.*

Állítás 1 *Legyen p: $Y \to X$ egy fedés, Z egy összefüggő topológikus tér, f,g: $Z \to Y$ két folytonos leképezés amik kielégítik $p \circ f = p \circ g$ azonosságot. Ha $\exists z \in Z$ amire $f(z) = g(z)$, akkor $f = g$.*

Lemma 2 *Az automorfizmusa Φ egy összefüggő fedésnek p:$Y \to X$ fixponttal az identitás lesz.*
Bizonyítás:
Alkalmazzuk az előző állítást $Z = Y$, $f = Id$ és $g = \Phi$-re.

Definíció 4 *Egy fedés p:$Y \to X$ Galois-nak hívunk ha Y összefüggő és $\overline{p}$ egy homomorfizmus:*
$Y \to Aut(Y|X)\backslash Y \xrightarrow{\overline{p}} X$

Állítás 2 *Az összefüggő fedés p:$Y \to X$ Galois akkor és csak akkora, ha Aut(Y|X) tranzitívan hat p minden fibrumán.*

Tétel 2 *Legyen $p : Y \to X$ Galois fedés. $G = Aut(Y|X)$ minden H részcsoportra a p projekció indukál egy $\overline{p}_H : H\backslash Y \to X$ leképezést, ami $H\backslash Y$-t X fedésévé alakítja.*
Vagyis ha $Z \to X$ egy összefüggő fedés, akkor f: $Y \to Z$ egy Galois fedés és $Z \cong H\backslash Y$ a $H = Aut(Y|Z)$, G részcsoportra. A $H \mapsto H\backslash Y, Z \mapsto Aut(Y|Z)$ hozzárendelések megadnak egy bijekciót G részcsoportjai és Y és X között lévő köztes Z fedések között. A fedés $q : Z \to X$ Galois akkor és csak akkor ha H egy normálosztó G-ben, ekkor $Aut(Z|X) \cong G/H$

3 Véges Étale algebrák mint nulla dimenziós varietások

Definíció 5 *Egy véges dimenziós k-algebra A-t, diagonalizálhatónak nevezünk ha izomorf valamely n-re k^n-nel, étale-nak nevezük k felett,ha $A \otimes L$ diagonalizálható valamely L testbővítésre.*

Tétel 3 *Galois elmélet főtétele - Grothendieck féle*
Legyen k egy test, ekkor a funktor ami a véges étale k-algebrát A-t a véges $Hom_k(A, k_s)$-be képezi egy anti-ekvivalenciát ad a véges étale k-algebrák katergóriájából a folytonos bal Gal(k)-hatással rendelkező véges halmazok kategóriájába.

Bizonyítás: $A = \prod L_i$ *A egy felbontása és egy* $\Phi \in Hom_k(A, k_s)$*, ez a leképezés indukál egy inklúziót pontosan egy* L_i*-t képez bele* k_s*-be. Valóban, ha* $\Phi(L_i) \neq 0$ *test lévén* L_i *beágyazódik* k_s*-be másfelől, a szozrat* $L_i \times L_j$ *nem ágyazódhat* k_s*-be hisz nullosztó mentes.*
Ezek alapján $Hom_k(A, k_s)$ *felbontható diszjunkt* $Hom_k(L_i, k_s)$ *únióra, ez egyben a Gal(k)-pályákra való felbontása.*

Állítás 3 *Legyen A egy véges dimenziós kommutatív k-algebra. Ekkor a következők ekvivalensek lesznek:*
1. A Étale
2. $A \otimes_k \overline{\mathrm{k}}$ *izomorf* $\overline{\mathrm{k}}$ *véges direkt összegével.*
3. $A \otimes_k \overline{\mathrm{k}}$ *redukált, vagyis nincs a 0-n kívűl nilpotens eleme.*

Legyen L k egy Galois bővítése, G a bővítés Galois csoportja. Egy étale k-algebra A-t L hasítja ha $A \otimes L$ izomorf L^n valamilyen n-re. Egy ilyen k-algebrára, legyen $F(A) = Hom_{k-algebra}(A, L)$

Tétel 4 *A funktor* $A \rightsquigarrow F(A)$ *egy kontravariáns ekvivalencia az L által hasított étale k-algebrák kategóriájából a véges G-halmazokba.*

Az $A \rightsquigarrow Spec(A)$ egy kontravariáns ekvivalencia a k feletti étale algebrák kategóriájából a nulla-dimenziós F feletti algebrai varietások kategóriájába. Ha V = Spec(A), akkor:

$$Hom_{F-algebra}(A, L) \cong Hom_{Spec(F)}(Spec(L), V) = V(L)$$

Utolsó egyenlőség definíció miatt teljesül.

Tétel 5 *A funktor* $V \rightsquigarrow V(L)$ *egy ekvivalencia a nulla-dimenziós k feletti algebrai varietások kategóriájából a véges folytonos G-halmazok kategóriájába. Ebben a megfeleltetésben az összefüggő varietások megfelelnek a tranzittív hatással.*

4 Severi-Brauer varietások

Definíció 6 *Egy Severi-Brauer vareitás egy k test fölött egy projektív algebrai varietás X egy k test fölött, úgy hogy a bővítés* $X_K = X \otimes_k K$ *izomorf lesz* P_K^{n-1}*-gyel valamilyen* $K|k$ *testbővítésre. Ekkor azt mondjuk hogy X hasad K felett.*

Tétel 6 *Legyen X egy Severi-Brauer n-1 dimenziós vareitás k felett. Ekkor a következők ekvivalensek:*
1. X izomorf a P_K^{n-1} *projektív térrel k felett.*
2. X-nek van k-racionális pontja.

Következmény 1 *Egy Severi-Brauer vareitás* X *mindig hasad* k *egy véges bővítése felett.*

Következmény 2 *Egy Severi-Brauer vareitás* X *mindig hasad* k *egy véges Galois bővítése felett.*