Jólfundált halmazok és a fundáltsági axióma

Készítette: Kővári Péter Viktor

Témavezető: Komjáth Péter

2021. őszi félév

Kutatómunkám során Komjáth Péter és Totik Vilmos Problems and Theorems in Classical Set Theory című könyvéből oldottam meg feladatokat, ezek közül ismertetem néhánynak a megoldását.

1. Jólfundált halmazok

1.1. Definíció. Egy $(P, <)$ részbenrendezett halmazt jólfundáltnak nevezünk, ha minden nemüres részhalmazának van minimális eleme, azaz olyan elem, amelynél nincs kisebb az adott részhalmazban.

1.2. Definíció. Legyen $(P, <)$ részbenrendezett halmaz. $Q \subseteq P$ kofinális P-ben, ha $\forall p \in P \ \exists q \in Q \ : \ q \geq p$.

1.3. Feladat. Legyen $(P, <)$ részbenrendezett halmaz. Ekkor létezik $Q \subseteq P$ kofinális P-ben, hogy $(Q, <)$ jólfundált.

Megoldás. Feltehető, hogy P nemüres, különben triviálisan teljesül az állítás. Legyen $|P| = \kappa$, a minimális κ számosságú rendszámot is κ jelöli. P-t κ típusban jólrendezzük, legyen ez a jólrendezés $<_\kappa$.

Definiáljuk $Q \subseteq P$-t az alábbi módon:

$Q = \{x \in P \ : \ \forall y \in P \ x < y \Rightarrow x <_\kappa y\}$

Megmutatjuk, hogy Q kofinális:

$x \in P$, legyen y_0 $<_\kappa$-minimális az $y \geq x$-ek között ($y \in P$).

Ha $y_0 < y$ ($y \in P$), akkor $x \leq y_0$ miatt $x < y$, így y_0 $<_\kappa$-minimalitása miatt $y_0 <_\kappa y$. Ezek szerint $y_0 \in Q$, tehát Q kofinális.

Megmutatjuk, hogy Q jólfundált:

Legyen $\emptyset \neq S \subseteq Q$, ekkor létezik $<_\kappa$-minimális $s \in S$. s $<$-minimális is, különben $t < s$ ($t \in S$) esetén Q definíciója szerint $t <_\kappa s$ is teljesülne, ami ellentmond s $<_\kappa$-minimalitásának. Ezzel beláttuk, hogy Q jólfundált.

1.4. Feladat. Legyen $(P, <)$ részbenrendezett halmaz. $(P, <)$ pontosan akkor jólfundált, ha létezik f rendszám értékű, rendezéstartó függvény $(P, <)$-en ($x < y$ esetén $f(x) < f(y)$).

Megoldás. Legyen f a feladatban leírt függvény a $(P, <)$ részbenrendezett halmazon, továbbá legyen $\emptyset \neq S \subseteq P$. Legyen $s \in S$ olyan elem, amire $f(s)$ minimális. Ekkor s minimális S-ben, különben $t < s$ ($t \in S$) esetén $f(t) < f(s)$, ami ellentmond s minimalitásának.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy $(P, <)$ jólfundált. Transzfinit rekurzióval definiáljuk az alábbi $P_\alpha \subseteq P$ halmazokat:

P_0 álljon P minimális elemeiből. Ha $\beta < \alpha$-ra már definiáltuk a P_β halmazokat és $P \setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} P_\beta \neq \emptyset$, akkor P_α álljon $P \setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} P_\beta$ minimális elemeiből (a jólfundáltság miatt P_α nemüres). Ezzel felbontottuk P-t páronként diszjunkt nemüres halmazok uniójára:

$P = \bigcup \{P_\alpha \ : \ \alpha < \xi\}$, valamely ξ rendszámra.

Legyen $f(x) = \alpha$, ha $x \in P_\alpha$. f nyilván jóldefiniált. Megmutatjuk, hogy f rendezéstartó. Legyen $x, y \in P$, $x < y$, $y \in P_\alpha$. Ekkor y minimalitása miatt $x \notin P_\alpha$, tehát $x \in P_\beta$, valamely $\beta < \alpha$-ra. Ekkor $f(x) < f(y)$, azaz f rendezéstartó.

2. Fundáltsági axióma

2.1. Axióma. Fundáltsági axióma:
Ha A nemüres halmaz, akkor létezik $x \in A$, amire $x \cap A = \emptyset$.

2.2. Feladat. Nem létezik x halmaz, amire $x \in x$.

Megoldás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik x halmaz, amire $x \in x$. Ekkor $\{x\} \neq \emptyset$, aminek x az egyetlen eleme, így a fundáltsági axióma szerint $x \cap \{x\} = \emptyset$. A feltétel szerint $x \in x$, továbbá $x \in \{x\}$, így $x \in \emptyset$, ami ellentmondás.

2.3. Feladat. Nem létezik x és y halmaz, amire $x \in y$ és $y \in x$ is teljesül.

Megoldás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik x és y halmaz, amire $x \in y$ és $y \in x$ is teljesül. Ekkor $\{x, y\} \neq \emptyset$, aminek pontosan két eleme van, x és y. A fundáltsági axióma szerint két eset lehetséges:

1. $x \cap \{x, y\} = \emptyset$. Ekkor a feltétel szerint $y \in x$, továbbá $y \in \{x, y\}$, így $y \in \emptyset$, ami ellentmondás.

2. $y \cap \{x, y\} = \emptyset$. Ekkor a feltétel szerint $x \in y$, továbbá $x \in \{x, y\}$, így $x \in \emptyset$, ami ellentmondás.

Ezzel beláttuk a feladat állítását.

2.4. Definíció. A z halmazt tranzitívnak nevezzük, ha $x \in y \in z$ esetén $x \in z$ is teljesül.

2.5. Feladat. Határozzuk meg az egyelemű tranzitív halmazokat!

Megoldás. Legyen $\{x\}$ egyelemű tranzitív halmaz. $x \in \{x\}$, ha van $y \in x$, akkor $\{x\}$ tranzitivitása miatt $y \in \{x\}$, azaz $y = x$, ekkor viszont $x \in x$, ami a 2.2. feladat miatt lehetetlen. Ezek szerint nem létezik $y \in x$, tehát x csak az üres halmaz lehet. $\{\emptyset\}$ valóban egyelemű tranzitív halmaz, tehát ez az egyetlen ilyen.

2.6. Definíció. Tranzitív rekurzióval definiáljuk minden α rendszámra a V_α halmazt a V_β $(\beta < \alpha)$-kból.
$V_0 = \emptyset$,
$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$,
$V_\alpha = \bigcup \{V_\beta \ : \ \beta < \alpha\}$, ha α limeszrendszám.

2.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy x rangos, ha $x \in V_\alpha$ valamely α-ra. x rangja $rk(x) = \min\{\alpha \ : \ x \in V_\alpha\}$.

2.8. Tétel. A fundáltsági axióma ekvivalens azzal, hogy minden x rangos.

2.9. Feladat. Oldjuk meg az $X \times Y = X$ egyenletet, ahol X, Y halmazok!

Megoldás. ($X = \emptyset$, Y tetszőleges) nyilván megoldás, megmutatjuk, hogy más megoldás nincs. Legyen (X, Y) megoldás, tegyük fel, hogy X nemüres. Legyen $x \in X$ olyan, amire $rk(x)$ minimális. Mivel $X = X \times Y$, $x = \langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ alakban írható valamely $a \in X$, $b \in Y$-ra. $a \in \{a\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\} = x$, így $rk(a) < rk(x)$, ami ellentmondás.