Jólfundált halmazok és a fundáltsági axióma

Készítette: Kővári Péter Viktor

Témavezető: Komjáth Péter

2021. őszi félév

Jólfundált halmazok

Definíció

Egy $(P, <)$ részbenrendezett halmazt jólfundáltnak nevezünk, ha minden nemüres részhalmazának van minimális eleme, azaz olyan elem, amelynél nincs kisebb az adott részhalmazban.

Jólfundált halmazok

Feladat

Legyen $(P, <)$ részbenrendezett halmaz. $(P, <)$ pontosan akkor jólfundált, ha létezik f rendszám értékű, rendezéstartó függvény $(P, <)$-en ($x < y$ esetén $f(x) < f(y)$).

Jólfundált halmazok

Megoldás

Legyen f a feladatban leírt függvény a $(P, <)$ részbenrendezett halmazon, továbbá legyen $\emptyset \neq S \subseteq P$.

Jólfundált halmazok

Megoldás

Legyen f a feladatban leírt függvény a $(P, <)$ részbenrendezett halmazon, továbbá legyen $\emptyset \neq S \subseteq P$.

Legyen $s \in S$ olyan elem, amire $f(s)$ minimális. Ekkor s minimális S-ben, különben $t < s$ $(t \in S)$ esetén $f(t) < f(s)$, ami ellentmond s minimalitásának.

Jólfundált halmazok

Megoldás

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy $(P, <)$ jólfundált.

Transzfinit rekurzióval definiáljuk az alábbi $P_\alpha \subseteq P$ halmazokat:

Jólfundált halmazok

Megoldás

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy $(P, <)$ jólfundált.

Transzfinit rekurzióval definiáljuk az alábbi $P_\alpha \subseteq P$ halmazokat:

P_0 álljon P minimális elemeiből. Ha $\beta < \alpha$-ra már definiáltuk a P_β halmazokat és $P \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta \neq \emptyset$, akkor P_α álljon $P \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta$ minimális elemeiből (a jólfundáltság miatt P_α nemüres).

Jólfundált halmazok

Megoldás

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy $(P, <)$ jólfundált.

Transzfinit rekurzióval definiáljuk az alábbi $P_\alpha \subseteq P$ halmazokat:

P_0 álljon P minimális elemeiből. Ha $\beta < \alpha$-ra már definiáltuk a P_β halmazokat és $P \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta \neq \emptyset$, akkor P_α álljon $P \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta$ minimális elemeiből (a jólfundáltság miatt P_α nemüres).

Ezzel felbontottuk P-t páronként diszjunkt nemüres halmazok uniójára:

$P = \bigcup \{P_\alpha \ : \ \alpha < \xi\}$, valamely ξ rendszámra.

Jólfundált halmazok

Megoldás

Legyen $f(x) = \alpha$, ha $x \in P_\alpha$. f nyilván jóldefiniált. Megmutatjuk, hogy f rendezéstartó.

Jólfundált halmazok

Megoldás

Legyen $f(x) = \alpha$, ha $x \in P_\alpha$. f nyilván jóldefiniált. Megmutatjuk, hogy f rendezéstartó.

Legyen $x, y \in P$, $x < y$, $y \in P_\alpha$. Ekkor y minimalitása miatt $x \notin P_\alpha$, tehát $x \in P_\beta$, valamely $\beta < \alpha$-ra. Ekkor $f(x) < f(y)$, azaz f rendezéstartó.

Fundáltsági axióma

Axióma

Fundáltsági axióma:

Ha A nemüres halmaz, akkor létezik $x \in A$, amire $x \cap A = \emptyset$.

Fundáltsági axióma

Feladat

Nem létezik x halmaz, amire $x \in x$.

Fundáltsági axióma

Feladat

Nem létezik x halmaz, amire $x \in x$.

Megoldás

Indirekt tegyük fel, hogy létezik x halmaz, amire $x \in x$. Ekkor $\{x\} \neq \emptyset$, aminek x az egyetlen eleme, így a fundáltsági axióma szerint $x \cap \{x\} = \emptyset$.

Fundáltsági axióma

Feladat

Nem létezik x halmaz, amire $x \in x$.

Megoldás

Indirekt tegyük fel, hogy létezik x halmaz, amire $x \in x$. Ekkor $\{x\} \neq \emptyset$, aminek x az egyetlen eleme, így a fundáltsági axióma szerint $x \cap \{x\} = \emptyset$.

A feltétel szerint $x \in x$, továbbá $x \in \{x\}$, így $x \in \emptyset$, ami ellentmondás.

Fundáltsági axióma

Feladat

Nem létezik x és y halmaz, amire $x \in y$ és $y \in x$ is teljesül.

Fundáltsági axióma

Feladat

Nem létezik x és y halmaz, amire $x \in y$ és $y \in x$ is teljesül.

Megoldás

Indirekt tegyük fel, hogy létezik x és y halmaz, amire $x \in y$ és $y \in x$ is teljesül. Ekkor $\{x, y\} \neq \emptyset$, aminek pontosan két eleme van, x és y. A fundáltsági axióma szerint két eset lehetséges:

Fundáltsági axióma

Feladat

Nem létezik x és y halmaz, amire $x \in y$ és $y \in x$ is teljesül.

Megoldás

Indirekt tegyük fel, hogy létezik x és y halmaz, amire $x \in y$ és $y \in x$ is teljesül. Ekkor $\{x, y\} \neq \emptyset$, aminek pontosan két eleme van, x és y. A fundáltsági axióma szerint két eset lehetséges:

1. $x \cap \{x, y\} = \emptyset$. Ekkor a feltétel szerint $y \in x$, továbbá $y \in \{x, y\}$, így $y \in \emptyset$, ami ellentmondás.

Fundáltsági axióma

Feladat

Nem létezik x és y halmaz, amire $x \in y$ és $y \in x$ is teljesül.

Megoldás

Indirekt tegyük fel, hogy létezik x és y halmaz, amire $x \in y$ és $y \in x$ is teljesül. Ekkor $\{x, y\} \neq \emptyset$, aminek pontosan két eleme van, x és y. A fundáltsági axióma szerint két eset lehetséges:

1. $x \cap \{x, y\} = \emptyset$. Ekkor a feltétel szerint $y \in x$, továbbá $y \in \{x, y\}$, így $y \in \emptyset$, ami ellentmondás.
2. $y \cap \{x, y\} = \emptyset$. Ekkor a feltétel szerint $x \in y$, továbbá $x \in \{x, y\}$, így $x \in \emptyset$, ami ellentmondás.

Fundáltsági axióma

Definíció

A z halmazt tranzitívnak nevezzük, ha $x \in y \in z$ esetén $x \in z$ is teljesül.

Fundáltsági axióma

Definíció

A z halmazt tranzitívnak nevezzük, ha $x \in y \in z$ esetén $x \in z$ is teljesül.

Feladat

Határozzuk meg az egyelemű tranzitív halmazokat!

Fundáltsági axióma

Definíció

A z halmazt tranzitívnak nevezzük, ha $x \in y \in z$ esetén $x \in z$ is teljesül.

Feladat

Határozzuk meg az egyelemű tranzitív halmazokat!

Megoldás

Legyen $\{x\}$ egyelemű tranzitív halmaz. $x \in \{x\}$, ha van $y \in x$, akkor $\{x\}$ tranzitivitása miatt $y \in \{x\}$, azaz $y = x$, ekkor viszont $x \in x$, ami az egyik korábbi feladat miatt lehetetlen.

Fundáltsági axióma

Definíció

A z halmazt tranzitívnak nevezzük, ha $x \in y \in z$ esetén $x \in z$ is teljesül.

Feladat

Határozzuk meg az egyelemű tranzitív halmazokat!

Megoldás

Legyen $\{x\}$ egyelemű tranzitív halmaz. $x \in \{x\}$, ha van $y \in x$, akkor $\{x\}$ tranzitivitása miatt $y \in \{x\}$, azaz $y = x$, ekkor viszont $x \in x$, ami az egyik korábbi feladat miatt lehetetlen.

Ezek szerint nem létezik $y \in x$, tehát x csak az üres halmaz lehet.

$\{\emptyset\}$ valóban egyelemű tranzitív halmaz, tehát ez az egyetlen ilyen.

Köszönöm a figyelmet!