

# Csavart koszorúszorzatok részcsoporthálói

Kőrösi Ákos, Pigler Donát  
témavezető: Pálfy Péter Pál

2021. december 17.

## Kérdés

Igaz-e, hogy minden véges háló izomorf egy véges csoport részcsoporthálójának intervallumával?

## Tétel (Börner, 1999)

Minden véges háló izomorf egy véges csoport részcsoporthálójának intervallumával akkor és csak akkor, ha a következők egyike igaz:

1. Minden véges (egynél több elemet tartalmazó) háló izomorf egy majdnem egyszerű  $G$  csoport  $\text{Int}(H, G)$  intervallumával, ahol  $H \leq G$  magtalan (azaz  $\bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg = 1$ ) részcsoporthálójának intervallumával, ahol  $H \leq G$  magtalan (azaz  $\bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg = 1$ ) részcsoporthálójának intervallumával.
2. Minden véges (egynél több elemet tartalmazó) háló izomorf egy  $G = \text{Twr}(T, D, D_0, \varphi)$  csavart koszorúszorzat  $\text{Int}(D, G)$  intervallumával, ahol  $T$  nemkommutatív véges egyszerű csoport,  $D$  véges csoport,  $D_0 < D$  részcsoporthálójának intervallumával, ahol  $T$  nemkommutatív véges egyszerű csoport,  $D$  véges csoport,  $D_0 < D$  részcsoporthálójának intervallumával és  $\varphi : D_0 \rightarrow \text{Aut}(T)$ -re igaz, hogy  $\varphi(D_0) \geq \text{Inn}(T)$ .

- a kérdésre várt válasz: nem igaz
- jó lenne visszavezetni a problémát a majdnem egyszerű csoportok esetére

## Állítás

Legyen  $T$  egy nemkommutatív véges egyszerű csoport, továbbá  $D_0 \leq D$ ,  $\varphi : D_0 \rightarrow \text{Aut}(T)$ , hogy  $\varphi(D_0) \geq \text{Inn}(T)$ . Ekkor  $\text{Sdp}(D_0, \varphi)$   $D$ -invariáns részcsoportjainak hálója izomorf  $\varphi$  összes  $D$ -beli  $D_0$ -t tartalmazó részcsoportra való kiterjesztésének duális hálójával egy kiegészítő legfelső elem hozzávételével (ez felel meg az eredeti hálóban a triviális részcsoporthoz).

- Kutatásunk fő iránya "érdekes" kiterjesztéshálók konstruálása volt (távlati cél: eddig előállítatlan hálók előállítása; közös strukturális jellemzők felismerése).
- Többféle ötlet: szimmetrikus csoportok "megcsavart" direkt szorzata (ezt fejtjük ki a továbbiakban), PSL-csoportokon alapuló konstrukciók, további szimmetrikus csoportokat használó ötletek...
- Az előadás további részében az egyik érdekes konstrukció, az  $(S_n \times S_n \times A_n) \rtimes Z_2$  csoport esetét tekintjük át.

# A vizsgálandó probléma

- Csoportunk  $G = (S_n \times S_n \times A_n) \rtimes Z_2$  lesz, ahol  $Z_2$  generátoreleme az első két koordináta cseréjével hat.
- Kiinduló részcsoporthoz a  $D_0 = \{(a, a, a, 1)\}$  diagonálist választjuk.
- Kiinduló homomorfizmusunk a  $\varphi : D_0 \rightarrow S_n$ , melyet  $(a, a, a, 1) \mapsto a$  ad meg.
- Feladatunk a  $\varphi$  homomorfizmus  $G$  részcsoporthoz vett kiterjesztései által alkotott háló megadása.

## Stratégia

Először a  $G$  részcsoporthoz hálójának  $D_0$  feletti részét határozzuk meg, ennek ismeretében a kiterjesztésháló kiszámolása már egyszerű feladat lesz.

# A részcsoportháló meghatározása I.

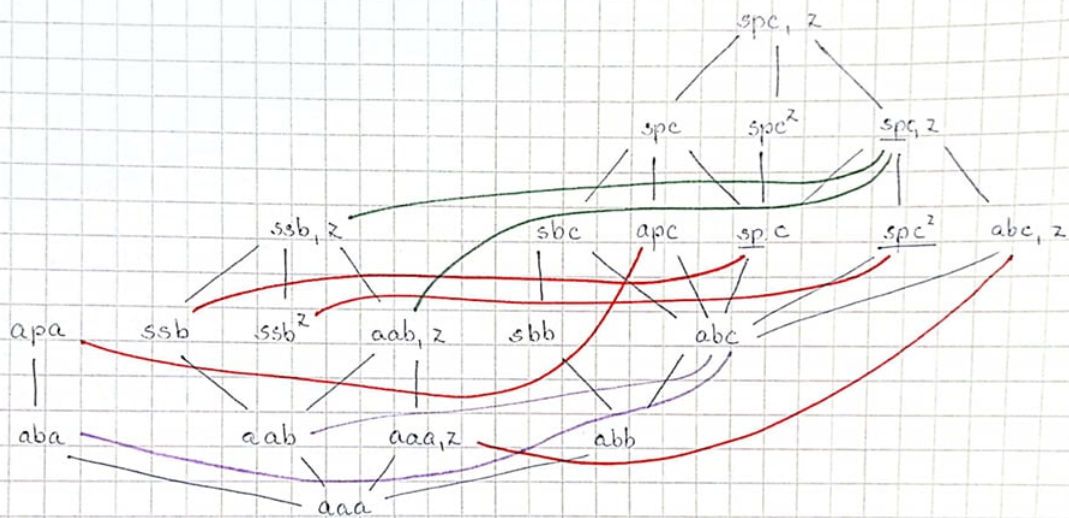
Összetett feladatnak tűnik, de néhány csoportelméleti trükkel jelentősen egyszerűsíthető.

- Vegyük észre, hogy  $N = A_n \times A_n \times A_n \times \{1\}$  normálosztó  $G$ -ben.
- Általános csoportelméleti megfontolásokból: bármely  $H \leq G$  részcsoporra:  
$$H \cap N \leq H \leq N_G(H \cap N)$$
- Elegendő tehát meggondolni, mi állhat elő  $H \cap N$  alakban, majd áttekinteni mindegyikükre a  $H \cap N$  és  $N_G(H \cap N)$  közé eső csoportokat.
- Nyilván  $H \cap N$  alakban éppen  $N$  részcsoportjai kaphatók meg (persze a diagonálist tartalmazókat tekintjük csak). Ezek hogyan nézhetnek ki?
- A diagonálist tartalmazó részcsoportok az  $N$  direkt szorzat szubdirekt részcsoportjai.
- A szubdirekt részcsoportok karakterizációját ismerjük.

## A részcsoportháló meghatározása II.

- Miután megvannak a lehetséges  $H \cap N$  részcsoportok, a normalizátoraikat könnyű kiszámolni.
- Korábbi meggondolásaink szerint az ilyen részcsoportok és normalizátoraik közti intervallumok tartalmaznak minden részcsoportot.
- Ismert, hogy egy  $A$  csoport és egy  $M$  normálosztója közti részcsoportok bijektíven megfelelnek  $A/M$  részcsoportjainak
- Ebből tudjuk, hogy egy-egy intervallumban hány részcsoportot várunk és milyen tartalmazásstruktúrában.
- A példánkban csak néhány nemtriviális intervallum van, ezekben heurisztikusan előállítottunk kellő számú részcsoportot.
- Összesítve adódik a keresett részcsoportháló.
- Hátravan a lehetséges kiterjesztések számbavétele.

# A részcsoportháló





# A kiterjesztésháló kiszámítása

- Mivel az  $(a, a, a, 1) \mapsto a$  kiterjesztéseit vizsgáljuk, azért egy  $(s, p, c, z)$  alakú elemhez  $s, p, c$  valamelyikét rendelhetjük
- Meggondolható, hogy mindig ugyanazon koordinátát kell rendelnünk – tehát vetítésről van szó (persze egy részcsoportban azonosan egyenlő koordináták esetén van némi ambiguitás).
- Szintén ellenőrizhető, hogy amennyiben egy részcsoportban a negyedik koordináta nemtriviális, továbbá az első és második koordináta nem azonosan egyenlő, akkor azokra nem vetíthetünk (mert "elcsavaródnak").
- Viszont ha egy olyan vetítést veszünk, amit az előbbi kitétel nem tilt meg, akkor az homomorfizmust ad.
- Ezen megfontolások alapján már meghatározható a kiterjesztésháló



Köszönjük a figyelmet!