Önhasonló halmazok közös pontjai

Imolay András, Zólomy Kristóf

Témavezető: Keleti Tamás

Egyéni kutatómunka 1 beszámoló

Alapok

Definíció

X teljes metrikus tér. $f : X \to X$ *kontrakció*, ha létezik $c < 1$, hogy

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

minden $x, y \in X$ esetén.

Tétel (Banach-féle fixponttétel)

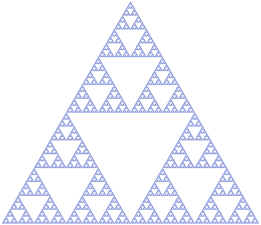
Egy f kontrakciónak pontosan egy x_0 fixpontja van, továbbá tetszőleges $x \in X$ pontra az $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ sorozat x_0-hoz konvergál.

Önhasonló halmaz

Definíció

$A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazt *önhasonló*nak nevezzük, ha léteznek olyan $f_1, f_2, \ldots, f_s$ hasonlóságok, melyekre $f_i(A) \neq A$ és

$$A = \bigcup_{i=1}^{s} f_i(A).$$



ábra: Sierpiński-háromszög. (Ábra forrása: Wikipédia)

Hausdorff-dimenzió

Definíció

$A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz s-dimenziós *Hausdorff-mértéke*

$$\mathcal{H}^s(A) = \liminf_{\delta \to 0} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} d(U_i)^s : \{U_i\} \text{ fedése A-nak, } d(U_i) < \delta \right\}.$$

Definíció

$A \subset \mathbb{R}^n$ *Hausdorff-dimenziója*:

$$\dim_H A = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

IFS

Tétel

Legyenek $f_1, f_2, \dots f_s$ *kontrakciók a valós számokon. Ekkor pontosan egy olyan* $F \subset \mathbb{R}$ *kompakt halmaz van, melyre*

$$F = \bigcup_{i=1}^{s} f_i(F).$$

Bizonyítás vázlat

- $\mathcal{K}$: Valós egyenes kompakt részhalmazainak halmaza
- $K \in \mathcal{K}$, $\delta > 0$ esetén legyen
  $K_\delta = \{x \in \mathbb{R}\ :\ \text{létezik } a \in K \text{ melyre } |x - a| \leq \delta\}$.
- Hausdorff-metrika: $d(A, B) = \inf\{\delta\ :\ A \subset B_\delta \text{ és } B \subset A_\delta\}$,
- $(\mathcal{K}, d)$ teljes metrikus tér
- $f(K) = \bigcup_{i=1}^{s} f_i(K)$ kontrakció $\mathcal{K}$-n.
- Igaz a tétel, ráadásul minden $K \in \mathcal{K}$ esetén a
  $K, f(K), f(f(K)), \ldots$ sorozat F-hez tart d szerint.

Bizonyítás vázlat

- $\mathcal{K}$: Valós egyenes kompakt részhalmazainak halmaza
- $K \in \mathcal{K}$, $\delta > 0$ esetén legyen
  $K_\delta = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \text{létezik } a \in K \text{ melyre } |x - a| \leq \delta\}$.
- Hausdorff-metrika: $d(A, B) = \inf\{\delta \ : \ A \subset B_\delta \text{ és } B \subset A_\delta\}$,
- $(\mathcal{K}, d)$ teljes metrikus tér
- $f(K) = \bigcup_{i=1}^{s} f_i(K)$ kontrakció $\mathcal{K}$-n.
- Igaz a tétel, ráadásul minden $K \in \mathcal{K}$ esetén a $K, f(K), f(f(K)), \ldots$ sorozat F-hez tart d szerint.

Bizonyítás vázlat

- $\mathcal{K}$: Valós egyenes kompakt részhalmazainak halmaza
- $K \in \mathcal{K}$, $\delta > 0$ esetén legyen
  $K_\delta = \{x \in \mathbb{R}$: létezik $a \in K$ melyre $|x - a| \leq \delta\}$.
- Hausdorff-metrika: $d(A, B) = \inf\{\delta$: $A \subset B_\delta$ és $B \subset A_\delta\}$,
- $(\mathcal{K}, d)$ teljes metrikus tér
- $f(K) = \bigcup_{i=1}^{s} f_i(K)$ kontrakció $\mathcal{K}$-n.
- Igaz a tétel, ráadásul minden $K \in \mathcal{K}$ esetén a
  $K, f(K), f(f(K)), \ldots$ sorozat F-hez tart d szerint.

A cikk összefoglalása

- $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$
- $f_{\lambda,0}(x) = \lambda x, \; f_{\lambda,1}(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$
- $K_\lambda = f_\lambda(K_\lambda) = f_{\lambda,0}(K_\lambda) \cup f_{\lambda,1}(K_\lambda)$
- $K_{1/2} = [0, 1]$
- $F_0 = [0, 1]$ és $F_n = f_\lambda(F_{n-1})$
- K_λ Cantor-halmaz

ábra: Forrás: Wikipédia

$\Lambda(x)$ vizsgálata

Definíció

$\Lambda(x) = \{\lambda \in (0, \frac{1}{2}] : x \in K_\lambda\}$

Tétel

Bármely $x \in (0, \frac{1}{2})$ esetén $\Lambda(x)$ egy Cantor-halmaz, azaz egy nemüres kompakt halmaz belső és izolált pontok nélkül, melynek minimuma x és maximuma $\frac{1}{2}$.

A π_λ hozzárendelés

Definíció

$\pi_\lambda : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to K_\lambda$

$\pi_\lambda((i_n)) = (1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} i_n \lambda^{n-1}$

$\Pi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times (0, \frac{1}{2}] \to [0,1]$

$\Pi((i_n), \lambda) = \pi_\lambda((i_n))$

Homeomorfizmus $\Lambda(x)$ és a sorozatok tere közt

Definíció

$\Psi_x : \Lambda(x) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ az a függvény, amelyre $\Psi_x(\lambda) = (i_n)$, ahol $(1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} i_n \lambda^{n-1} = x$

Definíció

$\Omega(x) = \{(i_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \Psi_x(\frac{1}{2}) = (x_n) \preccurlyeq (i_n) \preccurlyeq 01^{\infty}\}$

Lemma

Ψ_x *egy monoton csökkenő homeomorfizmust ad meg* $\Lambda(x)$ *és* $\Omega(x)$ *között.*

Ebből következik, hogy $\Lambda(x)$ Cantor-halmaz.

$\Lambda(x)$ Hausdorff-dimenziója

Tétel

Ha $x \in (0, \frac{1}{2})$*, akkor bármely* $\lambda \in \Lambda(x)$*-re*

$$\lim_{\delta \to 0} \dim_H(\Lambda(x) \cap (\lambda - \delta, \lambda + \delta)) = \dim_H K_\lambda = -\frac{\log 2}{\log \lambda}.$$

Következmény

Ha $x \in (0, \frac{1}{2})$*, akkor bármely* $I \subset [0, \frac{1}{2}]$ *nyílt intervallumra, melyre* $I \cap \Lambda(x) \neq \emptyset$*,* $\dim_H(\Lambda(x) \cap I) = \sup_{\lambda \in \Lambda(x) \cap I} \dim_H K_\lambda$*.*

$\Lambda(x)$ mérete

Tétel

Bármely $x \in (0, \frac{1}{2})$*-re* $\Lambda(x)$ *Hausdorff-dimenziója 1, Lebesgue-mértéke pedig 0.*

A tétel bizonyítása

Tétel

Ha $x \in (0, \frac{1}{2})$*, akkor bármely* $\lambda \in \Lambda(x)$*-re*

$$\lim_{\delta \to 0} \dim_H(\Lambda(x) \cap (\lambda - \delta, \lambda + \delta)) = \dim_H K_\lambda = -\frac{\log 2}{\log \lambda}.$$

Lemma

Ha $x \in (0, \frac{1}{2})$*, akkor bármely* $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$*-re*

$$\dim_H(\Lambda(x) \cap [x, \lambda]) \leq \dim_H K_\lambda.$$

Lemma

Legyen $x \in (0, \frac{1}{2})$*. Ha* $\lambda \in \Lambda(x) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ *olyan, hogy* $\Psi_x(\lambda)$ *nem* 0^∞*-nel végződik, akkor bármely* $\delta \in (0, \frac{1}{2} - \lambda)$*-ra*

$$\dim_H(\Lambda(x) \cap [\lambda, \lambda + \delta]) \geq \dim_H K_\lambda.$$

Köszönjük a figyelmet!