Önhasonló halmazok és mértékek a számegyenesen
Egyéni kutatómunka I.

Gáspár Attila
Témavezető: Keleti Tamás

1. Bevezetés

Az önhasonló halmazok Hausdorff-dimenziója egyszerűen megadható, ha a halmaz kicsinyített részei diszjunktak. Ez akkor is működik, ha a részek nem feltétlenül diszjunktak, de eléggé el vannak választva egymástól. Régóta megoldatlan sejtés, hogy elég-e az, ha a halmazt leíró hasonlóságokra bizonyos feltétel teljesül. A kutatómunkám során a sejtéshez kapcsolódó részeredményeket dolgoztam fel Varjú Péter [9] cikke alapján.

2. Önhasonló halmazok

2.1. Definíció. *Iterált függvényrendszernek* (röviden IFS-nek) nevezzük $\mathbb{R}^d$ hasonlóságainak egy

$$\Phi = \{\varphi_i \mid i \in \Lambda\}$$

véges rendszerét, ha minden φ_i hasonlósági aránya 1-nél kisebb.

A $d = 1$ esetben $\varphi_i(x) = \lambda_i x + t_i$ alakú, ahol $\lambda_i \in (-1, 1)$.

2.2. Állítás. *Legyen $\Phi = \{\varphi_i \mid i \in \Lambda\}$ IFS. Ekkor létezik egy egyértelmű kompakt K, amelyre teljesül, hogy*

$$K = \bigcup_{i \in \Lambda} \varphi_i(K).$$

A K-t a Φ *attraktorának* nevezzük.

Az iterált függvényrendszereknek fontos szerepe van a fraktálok elméletében, mert számos fraktál előáll IFS attraktoraként. Például Cantor-halmaz a

$$\Phi = \left\{ x \mapsto \frac{x}{3}, x \mapsto \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \right\}$$

attraktora. Magasabb dimenzióban többek között a Koch-görbe és a Sierpiński-háromszög áll elő a fenti módon.

2.3. Definíció. Az Φ IFS nem tartalmaz *pontos átfedést*, ha a Φ-beli hasonlóságok az általuk generált félcsoportot szabadon generálják.

Könnyen látható, hogy elég azonos hosszú kompozíciókat vizsgálni, azaz $\Phi = \{\varphi_i \mid i \in \Lambda\}$ pontosan akkor tartalmaz pontos átfedést, ha valamilyen $(i_1, \ldots, i_n) \neq (\widetilde{i_1}, \ldots, \widetilde{i_n})$ esetén

$$\varphi_{i_1} \circ \ldots \circ \varphi_{i_n} = \varphi_{\widetilde{i_1}} \circ \ldots \circ \varphi_{\widetilde{i_n}}.$$

2.4. Sejtés (Simon [7]). *Legyen* $\Phi = \{x \mapsto \lambda_i x + t_i \mid i \in \Lambda\}$ *egy IFS* $\mathbb{R}$*-en, amelynek* K *az attraktora. Tegyük fel, hogy* Φ *nem tartalmaz pontos átfedést. Legyen* $s > 0$ *az*

$$1 = \sum_{i \in \Lambda} |\lambda_i|^s$$

egyenlet megoldása. Ekkor

$$\dim K = \min(1, s),$$

ahol $\dim K$ *a* K *Hausdorff-dimenziója.*

A továbbiakban rögzítsünk egy $\Phi = \{\varphi_i \mid i \in \Lambda\}$ IFS-t, és egy $(p_i)_{i \in \Lambda}$ valószínűségi vektort, ahol $p_i > 0$ és $\sum p_i = 1$. Legyen $\lambda_i > 0$ a φ_i hasonlósági aránya.

2.5. Állítás. *Létezik egy egyértelmű* μ *valószínűségi mérték, amelyre*

$$\mu = \sum_{i \in \Lambda} p_i \varphi_i(\mu),$$

ahol $\varphi_i(\mu)(A) = \mu(\varphi_i^{-1}(A))$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy μ tartója a Φ attraktora.

2.6. Tétel (Feng, Hu [3]). *Van olyan* d *szám, amelyre teljesül, hogy* μ*-majdnem minden* x *pontra*

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} = d.$$

A d-re vezessük be a $\dim \mu$ jelölést.

2.7. Definíció. A μ *hasonlósági dimenziója*

$$\text{s-dim}\, \mu = \frac{\sum p_i \log p_i^{-1}}{\sum p_i \log \lambda_i^{-1}}.$$

2.8. Sejtés. *Legyen* Φ *IFS* $\mathbb{R}$*-en, és legyen* μ *a hozzá tartozó mérték (valamilyen valószínűségi vektorral). Ha* Φ *nem tartalmaz pontos átfedést, akkor*

$$\dim \mu = \min(1, \text{s-dim}\, \mu).$$

2.9. Állítás. *A 2.8. sejtésből következik a 2.4. sejtés.*

3. Algebrai paraméterű IFS-ek

3.1. Definíció. Az $\mathbb{R}$ hasonlóságain definiáljuk a d távolságot a következőképpen:

$$d(x \mapsto \lambda_1 x + t_1, x \mapsto \lambda_2 x + t_2) = \begin{cases} |t_1 - t_2| & \text{ha } \lambda_1 = \lambda_2 \\ \infty & \text{ha } \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

Legyen $\Phi = \{\varphi_i \mid i \in \Lambda\}$ IFS. Vezessük be a

$$\Delta_n(\Phi) = \min_{(i_1, \ldots, i_n) \neq (\tilde{i}_1, \ldots, \tilde{i}_n)} d(\varphi_{i_1} \circ \ldots \circ \varphi_{i_n}, \varphi_{\tilde{i}_1} \circ \ldots \circ \varphi_{\tilde{i}_n})$$

jelölést. A Φ teljesíti az *exponenciális elválasztási tulajdonságot*, ha van olyan $c > 0$, hogy végtelen sok n-re $\Delta_n(\Phi) > c^{-n}$.

3.2. Tétel (Hochman [4]). *Ha Φ teljesíti az exponenciális elválasztási tulajdonságot, akkor a 2.8. sejtés igaz Φ-re.*

3.3. Tétel (Hochman). *Legyen $\Phi = \{\lambda_i x + t_i \mid i \in \Lambda\}$ pontos átfedés nélküli IFS. Ha minden λ_i és t_i algebrai, akkor Φ teljesíti az exponenciális elválasztási tulajdonságot.*

3.4. Következmény. *Ha minden λ_i és t_i algebrai, akkor Φ-re igaz a 2.8. sejtés.*

3.5. Tétel (Rapaport [5]). *A Φ-re igaz a a 2.8. sejtés, ha minden λ_i algebrai.*

Rapaport bizonyításának egyik fő ötlete, hogy az eltolásparaméterek terében a pontos átfedéseket eredményező paraméterek halmazát vizsgálja, ami előáll bizonyos típusú lineáris alterek uniójaként. Az alterekhez olyan magasabb dimenziós IFS-eket rendel, amelyeknek minden paramétere algebrai, majd ezekre alkalmazza Hochman egyik eredményének magasabb dimenziós változatát.

4. Homogén IFS-ek

4.1. Definíció. Homogénnek nevezzük a $\Phi = \{\lambda x + t_i \mid i \in \Lambda\}$ alakú IFS-eket.

4.2. Tétel (Varjú [8]). *Legyen $\lambda \in (0,1)$ tetszőleges. Ekkor a*

$$\Phi_\lambda = \{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1\}$$

IFS-re teljesül a 2.8. sejtés.

A Φ_λ-ra a 2.4. sejtés triviális, mert az attraktor λ-tól függően vagy egy intervallum, vagy egy Cantor-halmaz.

Jelöljük ν_λ-val az előző tételben szereplő Φ_λ-hoz és az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ valószínűségi vektorhoz tartozó mértéket. A ν_λ-t *Bernoulli-konvolúciónak* nevezzük.

4.3. Definíció. Legyen (ξ_i) független, $\frac{1}{2}$ paraméterű Bernoulli-eloszlású változók sorozata. A Φ_λ *entrópiarátája*

$$h(\Phi_\lambda) = \lim_{n \to \infty} \frac{H(\sum_{j=0}^{n} \xi_j \lambda^j)}{n},$$

ahol H a Shannon-entrópiát jelöli.

A Fekete-lemma felhasználásával látható, hogy $h(\Phi_\lambda)$ mindig létezik, sőt, a határérték valójában infimum.

4.4. Tétel (Hochman). *Legyen $\lambda \in (0,1)$ algebrai. Ekkor*

$$\dim \nu_\lambda = \min\left(1, \frac{h(\Phi_\lambda)}{\log \lambda^{-1}}\right)$$

Az előző tétel felhasználásával minden $\lambda \in (0,1)$-re meghatározható $\dim \nu_\lambda$, mivel a Φ_λ csak algebrai λ esetén tartalmazhat pontos átfedést.

4.5. Tétel (Rapaport, Varjú [6]). *Definiáljuk a*

$$\Phi_{\lambda,t} = \{x \mapsto \lambda x, x \mapsto \lambda x + 1, x \mapsto \lambda x + t\}$$

IFS-t. Ha $\lambda \in (2^{-2/3}, 1)$, akkor $\Phi_{\lambda,t}$-ra igaz a 2.8. sejtés.

4.6. Tétel. *Legyen (η_n) tetszőleges pozitív valósakból álló sorozat. Ekkor van olyan homogén Φ IFS, ami nem tartalmaz pontos átfedést, de $\Delta_n(\Phi) \leq \eta_n$ minden n-re.*

A 4.6. tételre többféle bizonyítás ismert. Baker [1] konstrukciójában minden hasonlósági arány $\frac{1}{2}$, Bárány és Käenmäki [2] pedig megmutatta, hogy $\Phi_{\lambda,t}$ alakú példa is van.

Hivatkozások

[1] Simon Baker. Iterated function systems with super-exponentially close cylinders. *Advances in Mathematics*, 379:107548, 2021.

[2] Balázs Bárány and Antti Käenmäki. Super-exponential condensation without exact overlaps, 2020.

[3] De-Jun Feng and Huyi Hu. Dimension theory of iterated function systems, 2010.

[4] Michael Hochman. On self-similar sets with overlaps and inverse theorems for entropy. *Annals of Mathematics*, 180(2):773–822, 2014.

[5] Ariel Rapaport. Proof of the exact overlaps conjecture for systems with algebraic contractions, 2020.

[6] Ariel Rapaport and Péter P. Varjú. Self-similar measures associated to a homogeneous system of three maps, 2021.

[7] Károly Simon. Overlapping cylinders: the size of a dynamically defined Cantor-set. 1996.

[8] Péter P. Varjú. On the dimension of Bernoulli convolutions for all transcendental parameters, 2019.

[9] Péter P. Varjú. Self-similar sets and measures on the line, 2021.