A kontinuumhipotézis következményei

Bursics Balázs
Témavezető: Komjáth Péter

A 2021. őszi félévben folytatott egyéni kutatómunkám fő célja az volt, hogy az [1] cikk 1. tételének bizonyításában szereplő hiányosságokat kijavítsam.

Felkészülésképpen foglalkoztam a kontinuumhipotézissel ekvivalens feltételekről szóló feladatokkal, az 1. részben ezek közül néhánynak röviden vázolom a megoldását.

A 2. részben pedig kimondom a vizsgált tételt, majd a teljes bizonyítást is leírom. Érdemes még megjegyezni, hogy mint a szóban forgó cikkben is szerepel, a tétel állításának megfordítása is igaz, egyszerűen bizonyítható, hogy a tételben szereplő színezés létezéséből következik, hogy $c = \aleph_1$.

1.

Állítás. *A kontinuumhipotézis ekvivalens azzal, hogy $\mathbb{R}^3$ particionálható A_1, A_2, A_3 halmazokra úgy, hogy tetszőleges, az x_i-tengellyel párhuzamos L egyenesre $A_i \cap L$ véges.*

Ha igaz a kontinuumhipotézis, akkor $\mathbb{R}$-et bijektíven megfeleltethetjük $(\omega_1 \setminus \omega)$-nak. Fixáljunk ezen kívül minden $\alpha < \omega_1$-re egy $f_\alpha : \alpha \to \omega$ bijekciót. Ezután tetszőleges $(\omega_1 \setminus \omega)^3$-beli ponthoz rendeljünk egy olyan ω_1^3-beli pontot, aminek két koordinátája véges, úgy, hogy ha a vizsgált pont legnagyobb koordinátája α, akkor a másik koordináta helyett az f_α szerinti képüket vegyük. Ezután ha a kapott pont i. koordinátája a legkisebb, akkor osszuk be A_i-be, az így kapott partíció teljesíti a kért feltételt.

Ha pedig létezik ilyen partíció, akkor valamilyen $B \subset \mathbb{R}$, $|B| = \aleph_0$ és $C \subset \mathbb{R}$, $|C| = \aleph_1$ halmazokra a $H = B \times C \times \mathbb{R}$ halmaz egyrészt $\aleph_1$ darab x_3-tengellyel párhuzamos egyenesből áll, így $|H \cap A_3| \leq \aleph_1$, másrészt az is látható, hogy minden $x \in \mathbb{R}$-re $B \times C \times \{x\}$ tartalmaz A_3-beli pontot, így $c \leq \aleph_1$.

Ezt a gondolatmenetet általánosítva belátható az is, hogy $c \leq \aleph_n$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbb{R}^{n+2}$ felbontható $A_1, A_2, \ldots, A_{n+2}$ diszjunkt halmazokra úgy, hogy tetszőleges, az x_i-tengellyel párhuzamos L egyenesre $A_i \cap L$ véges.

Állítás. *A kontinuumhipotézis ekvivalens azzal, hogy léteznek $f_0, f_1, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, amikre tetszőleges $X \subset \mathbb{R}$ nem megszámlálható halmaz esetén véges sok $n < \omega$ kivételével $f_n|X| = \mathbb{R}$.*

Tegyük fel, hogy teljesül a kontinuumhipotézis. Ekkor legyen $A = \{\underline{a}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ az $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ értékű ω-sorozatok halmaza, és legyen $\mathbb{R} = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Rögzített $x = x_\alpha$, $\alpha < \omega_1$ mellett definiáljuk az $\{f_i(x) : i \in \omega\}$ valós sorozatot úgy, hogy minden $\beta < \alpha$-ra legyen k, hogy $f_k(x) = \underline{a}_\beta(k)$ (ahol $\underline{a}_\beta(k)$ az $\underline{a}_\beta$ sorozat k. elemét jelöli). Ezt minden $x \in \mathbb{R}$-re végrehajtva olyan $f_1, f_2, \ldots$ függvényeket kapunk, hogy minden $\underline{a}_\beta$-ra megszámlálhatóan sok kivétellel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik n, hogy $f_n(x) = \underline{a}_\beta(n)$ (ugyanis minden $\beta < \alpha < \omega_1$-re x_α-hoz létezik ilyen). Tegyük fel most indirekt módon, hogy van $X \subset \mathbb{R}$ nem megszámlálható halmaz, amire végtelen sok n-re $f_n|X|$ valódi részhalmaza $\mathbb{R}$-nek. Ekkor vehetünk egy olyan $\underline{a}$ sorozatot, ami ilyen n-ekre $(\mathbb{R} \setminus f_n|X|)$ egy elemét veszi fel, különben pedig végtelent. De ekkor valamilyen $\beta < \omega_1$-re $\underline{a} = \underline{a}_\beta$, ez viszont ellentmond a fentieknek.

A másik irányú implikációhoz elegendő egy olyan $X \subset \mathbb{R}$ halmazt vennünk, amire $|X| = \aleph_1$.

Állítás. *A kontinuumhipotézis ekvivalens azzal, hogy $\mathbb{R}$ particionálható A, B nem megszámlálható halmazokra úgy, hogy minden $d \in \mathbb{R}$ esetén $A + d \cap B$ megszámlálható.*

Ha $c=\aleph_1$, akkor $\alpha<\omega_1$-re vehetünk $X_\alpha, D_\alpha\subset\mathbb{R}$, $|X_\alpha|=|D_\alpha|=\aleph_0$ halmazokat, melyekre $\beta<\alpha<\omega$ esetén $H_\beta\subset H_\alpha$, $D_\beta\subset D_\alpha$ teljesül, továbbá $\cup\{X_\alpha:\alpha<\omega_1\}=\cup\{D_\alpha:\alpha<\omega_1\}=\mathbb{R}$, és $x\in X_\alpha, d\in D_\alpha$ esetén $(x-d),(x+d)\in X_\alpha$. Ezután minden α limeszrendszámra osszuk $(X_{\alpha+1}\setminus X_\alpha)$-t A-ba, $(X_{\alpha+2}\setminus X_{\alpha+1})$-et B-be, $(X_{\alpha+3}\setminus X_{\alpha+2})$-t megint A-ba, és így tovább. Így $|A|=|B|=c$, és tetszőleges $d\in\mathbb{R}$, $d\in D_\alpha$ esetén $a\in(A\setminus X_\alpha)$-ra $a+d\in A$.

Ha pedig létezik ilyen partíció, és indirekten azt is feltesszük, hogy $c>\aleph_1$, akkor azt is feltehetjük, hogy $|A|\geq\aleph_2$. Egy $b\in B$ ponthoz vegyünk egy olyan $X\subset\mathbb{R}$, $|X|=\aleph_1$ halmazt, amire $X+b\subset B$. Minden $x\in X$-hez legyen $A_x=\{a\in A: a+x\in B\}$, ekkor $|A_x|=\aleph_0$, és $|\cup\{A_x:x\in X\}|\leq\aleph_1$, így létezik $a\in(A\setminus\cup\{A_x:x\in X\})$, erre az a-ra $a+X\subset A$, így $|((b-a)+A)\cap B|\geq|X|=\aleph_1$, ami ellentmondás lenne.

2.

Tétel (Erdős, Komjáth). *Ha teljesül a kontinuumhipotézis, akkor a sík pontjai kiszínezhetők megszámlálhatóan sok színnel úgy, hogy ne keletkezzen derékszögű háromszög, aminek a csúcsai egyszínűek.*

Bizonyítás. Transzfinit rekurzióval definiáljuk minden $\alpha<\omega_1$-re a H_α megszámlálható síkbeli ponthalmazt, és egyenesek és körök megszámlálható $\mathscr{C}_\alpha$ halmazát úgy, hogy teljesítsék a következőket:

(1) $\alpha<\beta<\omega_1$ esetén $H_\alpha\subseteq H_\beta$ és $\mathscr{C}_\alpha\subseteq\mathscr{C}_\beta$.
(2) Ha $\lambda<\omega_1$ limeszrendszám, akkor $H_\lambda=\cup\{H_\alpha:\alpha<\lambda\}$, és $\mathscr{C}_\lambda=\cup\{\mathscr{C}_\alpha:\alpha<\lambda\}$.
(3) $\cup\{H_\alpha:\alpha<\omega_1\}=\mathbb{R}^2$.
(4) Ha $x,y\in H_\alpha$ különbözőek, akkor az őket összekötő egyenes, és a Thalész-körük is $\mathscr{C}_\alpha$-ban van.
(5) Ha $x,y,z\in H_\alpha$ nem esnek egy egyenesre, akkor a köréírt körük $\mathscr{C}_\alpha$-ban van.
(6) Ha $e_1,e_2\in\mathscr{C}_\alpha$ különbözőek, akkor $e_1\cap e_2\subset H_\alpha$.
(7) Ha $x\in C\in H_\alpha$, C egy kör, akkor C-n az x-szel átellenes pont is H_α-ban van.
(8) Ha $L\in\mathscr{C}_\alpha$ egyenes, és $x\in H_\alpha\cap L$, akkor az L-re x-ben állított merőleges is $\mathscr{C}_\alpha$-ban van.

Feltettük, hogy teljesül a kontinuumhipotézis, így $\mathbb{R}^2$-et jólrendezhetjük ω_1 típusban, ekkor Skolem-típusú lezárással megkonstruálhatjuk H_α-t és $\mathscr{C}_\alpha$-t.

Szintén transzfinit rekurzióval definiáljuk $\alpha<\omega_1$-re a $\varphi:\cup\mathscr{C}_\alpha\to[\omega]^\omega$ és $f:\cup H_\alpha\to\omega$ leképezéseket, ezektől a következőket követeljük meg:

(9) Ha $x,y\in H_{\alpha+1}\setminus H_\alpha$, és $x\neq y$, akkor $f(x)\neq f(y)$.
(10) Ha $e\in\mathscr{C}_\alpha$, $x\in e$, $x\notin H_\alpha$, akkor $f(x)\in\varphi(e)$.
(11) Ha $C\in\mathscr{C}_\alpha$ kör, $i\in\varphi(C)$, $x,y\in C$, $f(x)=f(y)=i$, akkor x,y nem átellenes pontok C-n.
(12) Ha $C\in\mathscr{C}_\alpha$ kör, $i\notin\varphi(C)$, akkor C-n legfeljebb két olyan x pont található, amire $f(x)=i$.
(13) Ha $L\in\mathscr{C}_\alpha$ egyenes, és $i\notin\varphi(L)$, akkor legfeljebb egy olyan $x\in L$ létezik, amire $f(x)=i$.
(14) Ha $L_1,L_2\in\mathscr{C}_\alpha$ merőleges egyenesek, $\{x\}=L_1\cap L_2$, akkor $f(x)\notin\varphi(L_1)\cap\varphi(L_2)$.

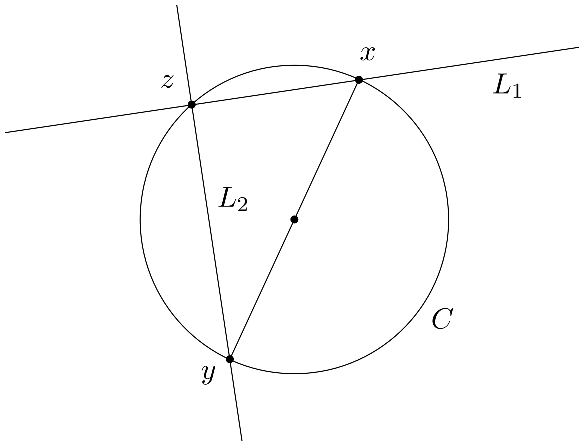
Először megmutatjuk, hogy az f által meghatározott színezés szerint nem lesz egyszínű derékszögű háromszög: Tegyük fel, hogy x,y,z derékszöget zárnak be y-nál, és $f(x)=f(y)=f(z)=i$. Legyen a három pont köré írt kör C, ilyenkor x és z átellenes pontok C-n. Ekkor $i\in\varphi(C)$ ellentmondana (11)-nek, $i\notin\varphi(C)$ pedig (12)-nek mondana ellent.

Így elég belátnunk, hogy φ és f valóban megkonstruálható a (9)-(14) feltételek betartásával. Tegyük fel tehát, hogy $\alpha<\omega_1$-re már értelmeztük φ-t és f-et $\mathscr{C}_\alpha$-n illetve H_α-n, azt kell megmutatnunk, hogy ekkor megfelelően kiterjeszthetőek $\mathscr{C}_{\alpha+1}$-re illetve $H_{\alpha+1}$-re.

Elsőnek definiáljuk f-et $(H_{\alpha+1}\setminus H_\alpha)$-n, ez megszámlálható halmaz, így létezik ω típusú felsorolása, legyen ez $\{x_0,x_1,x_2,\ldots\}$. A (6) feltétel szerint minden $x\in(H_{\alpha+1}\setminus H_\alpha)$-hoz legfeljebb 1 olyan $e\in\mathscr{C}_\alpha$ létezik, amire $x\in e$. Definiáljuk f értékét sorban az $\{x_0,x_1,x_2,\ldots\}$ pontokon úgy, hogy $f(x_i) \geq \max(\{f(x_0), \ldots, f(x_{i-1})\}) + 2$ legyen ($i \geq 1$-re), és $x_i \in e \in \mathscr{C}_\alpha$ esetén $f(x_i) \in \varphi(e)$ legyen (mivel $\varphi(e)$ feltevés szerint végtelen halmaz, ez lehetséges.) Ekkor (9) és (10) teljesülni fog, továbbá ebben a lépésben végtelen sok színt nem használtunk fel. Mivel egy $\mathscr{C}_{\alpha+1} \setminus \mathscr{C}_\alpha$-beli egyenesen (4) miatt legfeljebb 1 H_α-beli pont van, azt is feltehetjük még, hogy ha $L \in \mathscr{C}_\alpha$ egyenes, és $x_i \in L$, akkor ha az L-re x_i-ben állított merőleges (ami (8) szerint $\mathscr{C}_{\alpha+1} \setminus \mathscr{C}_\alpha$-ben van) esetleges H_α-beli pontjának színe j, akkor $f(x_i) \neq j$.

Ezután definiáljuk φ-t a $\mathscr{C}_{\alpha+1} \setminus \mathscr{C}_\alpha$-beli körökön, legyen $C \in \mathscr{C}_{\alpha+1} \setminus \mathscr{C}_\alpha$ tetszőleges kör. Az (5) feltétel miatt C-n legfeljebb kettő H_α-beli pont található. Ha ezek színe különböző, vagy legfeljebb 1 ilyen pont van, akkor legyen $\varphi(C) = \omega \setminus \{f(x) : x \in C \cap H_\alpha\}$. Ez végtelen halmaz, amire (9) és (10) miatt teljesül (12), és (11) is teljesül, mivel (7) miatt átellenes pontok csak ugyanabban a lépésben kerülhetnek C-re, a $C \cap H_\alpha$ elemeit és az ezekkel átellenes pontokat leszámítva, így (9) szerint nem lesz egyforma a színük, a $C \cap H_\alpha$-beli pontok színe pedig nincs $\varphi(C)$-ben.

Ha C-n két azonos színű H_α-beli pont található, akkor pedig legyen $\varphi(C) = \omega$. Ekkor (12) triviálisan teljesül. (11) igazolásához tegyük fel indirekt módon, hogy $i \in \varphi(C)$, $x, y \in C$, $f(x) = f(y) = i$, és x, y átellenes pontok C-n. Mint az előző esetben is láttuk, átellenes pontok csak akkor lehetnek egyszínűek, ha az egyikük H_α-beli. Mindkét pont nem lehet H_α-ban, hiszen akkor (4) szerint $C \in \mathscr{C}_\alpha$ lenne. Tegyük fel tehát, hogy $x \in H_\alpha$, ekkor $y \in H_{\alpha+1} \setminus H_\alpha$. Legyen az x-től különböző $C \cap H_\alpha$-beli pont z, ekkor $f(z) = i$. Legyen L_1 az x és z által generált egyenes, L_2 pedig az y és z által generált egyenes.

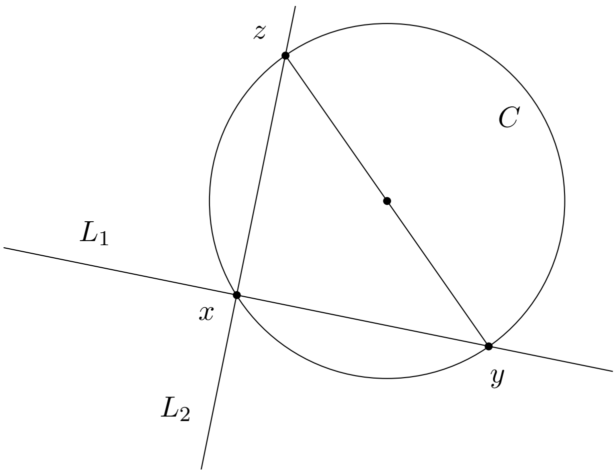


Mivel x, y átellenes pontok, ezek merőlegesek egymásra, így (14) szerint $f(y) = i \notin \varphi(L_1) \cap \varphi(L_2)$. Viszont $f(x) = f(y) = f(z) = i$ és (13) miatt $i \in \varphi(L_1)$, és $i \in \varphi(L_2)$, ez ellentmondás lenne (hiszen $x, z \in H_\alpha$ és (4) miatt $L_1 \in \mathscr{C}_\alpha$, L_2 pedig a z-ben L_1-re állított merőleges, így (8) miatt $L_2 \in C_\alpha$). Tehát C-re is teljesül (11).

Végül definiáljuk φ-t a $\mathscr{C}_{\alpha+1} \setminus \mathscr{C}_\alpha$-beli egyeneseken is. Legyen L tetszőleges ilyen, ekkor (4) miatt legfeljebb egy H_α-beli pont lehet rajta, ha nincs ilyen, vagy nincs vele egyszínű $L \cap (H_{\alpha+1} \setminus H_\alpha)$-beli pont, akkor $\varphi(L)$-ből hagyjuk el a rajta lévő $H_{\alpha+1}$-beli pontok színét, azaz legyen $\varphi(L) = \omega \setminus \{f(x) : x \in L \cap H_{\alpha+1}\}$, ha pedig létezik egy ilyen $y \in L \cap H_\alpha$ pont, és van vele egyszínű $L \cap H_{\alpha+1}$-beli pont, akkor pedig vegyük vissza $\varphi(L)$-be y színét, vagyis legyen $\varphi(L) = (\omega \setminus \{f(x) : x \in L \cap H_{\alpha+1}\}) \cup \{f(y)\}$. Ez egyrészről mindenképp végtelen halmaz, hiszen $H_{\alpha+1} \setminus H_\alpha$ színezésekor végtelen sok színt nem használtunk fel, másrészt teljesülni fog rá (13), mivel $\varphi(L)$-ből csak olyan színeket hagytunk el, amikből az $(\alpha + 1)$. lépésig legfeljebb egy pont került L-re, és a későbbi lépésekben (10) szerint az egyenes pontjait már csak $\varphi(L)$-ből színezzük.

Tehát azt kell már csak megmutatnunk, hogy (14) is teljesül. Vegyünk ehhez két merőleges egyenest, legyenek ezek $L_1, L_2 \in \mathscr{C}_{\alpha+1}$. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor csak az egyikük van $\mathscr{C}_{\alpha+1} \setminus \mathscr{C}_\alpha$-ból, tegyük fel, hogy $L_1 \in \mathscr{C}_\alpha$, és $L_2 \in \mathscr{C}_{\alpha+1} \setminus \mathscr{C}_\alpha$, és legyen $\{x\} = L_1 \cap L_2$. Tegyük fel indirekt módon, hogy $f(x) \in \varphi(L_1) \cap \varphi(L_2)$. A φ függvény konstrukciója alapján $f(x) \in \varphi(L_2)$ csak úgy lehet, hogy létezik $y \in L_2 \cap H_\alpha$, amire $f(x) = f(y)$. Viszont észrevehetjük, hogy x-hez L_1 az egyetlen őt tartalmazó $\mathscr{C}_\alpha$-beli alakzat, így ezt az esetet $H_{\alpha+1} \setminus H_\alpha$ színezésekor kizártuk.

Így elegendő az $L_1, L_2 \in \mathscr{C}_{\alpha+1} \setminus \mathscr{C}_\alpha$ esetet ellenőriznünk, legyen megint $\{x\} = L_1 \cap L_2$. Ha $x \in H_\alpha$, akkor $f(x) \in \varphi(L_1)$ csak úgy teljesülhet, hogy létezik $y \in L_1 \cap (H_{\alpha+1} \setminus H_\alpha)$, amire $f(y) = f(x)$, és hasonlóan, $f(x) \in \varphi(L_2)$ csak akkor teljesülhet, ha létezik $z \in L_2 \cap (H_{\alpha+1} \setminus H_\alpha)$, amire $f(z) = f(x)$, de ekkor a kettő nem teljesülhet egyszerre, mert $y \neq z$ ellentmondana (9)-nek. Tegyük fel végül, hogy $x \in (H_{\alpha+1} \setminus H_\alpha)$, ekkor $f(x) \in \varphi(L_1)$-ből következik, hogy létezik $y \in L_1 \cap H_\alpha$, amire $f(y) = f(x)$, és $f(x) \in \varphi(L_2)$-ből szintén következik, hogy létezik $z \in L_2 \cap H_\alpha$, amire $f(z) = f(x)$.



Vegyük most y és z Thalész-körét, legyen ez C. Ekkor $y, z \in H_\alpha$ és (4) miatt $C \in \mathscr{C}_\alpha$, továbbá mivel L_1 és L_2 merőlegesek, $x \in C$. Tehát C az egyetlen x-et tartalmazó $\mathscr{C}_\alpha$-beli alakzat, ezért (10) szerint $f(x) \in \varphi(C)$. Ez viszont (11) szerint lehetetlen, mert y és z átellenes pontok C-n, és $f(y) = f(z) = f(x) \in \varphi(C)$.

Tehát ha a fenti módon járunk el, akkor φ és f valóban teljesíteni fogja a (9)-(14) feltételeket, így a sík f szerinti színezése mellett nem keletkezik egyszínű derékszögű háromszög. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] P. Erdős, P. Komjáth, Countable decompositions of $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$, Discrete Comput. Geom. 5:325-331 (1990)