A kontinuumhipotézis következményei

Bursics Balázs

Témavezető: Dr. Komjáth Péter

Tétel (Erdős, Komjáth)

Ha teljesül a kontinuumhipotézis, akkor a sík pontjai kiszínezhetők megszámlálhatóan sok színnel úgy, hogy ne keletkezzen derékszögű háromszög, aminek a csúcsai egyszínűek.

A bizonyítás vázlata 1.

Minden $\alpha < \omega_1$-re $H_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ megszámlálható, $\mathscr{C}_\alpha$ egyenesek és körök megszámlálható halmaza:

(1) $\alpha < \beta < \omega_1$ esetén $H_\alpha \subseteq H_\beta$ és $\mathscr{C}_\alpha \subseteq \mathscr{C}_\beta$.

(2) Ha $\lambda < \omega_1$ limeszrendszám, akkor $H_\lambda = \cup\{H_\alpha : \alpha < \lambda\}$, és $\mathscr{C}_\lambda = \cup\{\mathscr{C}_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

(3) $\cup\{H_\alpha : \alpha < \omega_1\} = \mathbb{R}^2$.

(4) Ha $x, y \in H_\alpha$ különbözőek, akkor az őket összekötő egyenes, és a Thalész-körük is $\mathscr{C}_\alpha$-ban van.

(5) Ha $x, y, z \in H_\alpha$ nem esnek egy egyenesre, akkor a köréírt körük $\mathscr{C}_\alpha$-ban van.

(6) Ha $e_1, e_2 \in \mathscr{C}_\alpha$ különbözőek, akkor $e_1 \cap e_2 \subset H_\alpha$.

(7) Ha $x \in C \in H_\alpha$, C egy kör, akkor C-n az x-szel átellenes pont is H_α-ban van.

(8) Ha $L \in \mathscr{C}_\alpha$ egyenes, és $x \in H_\alpha \cap L$, akkor az L-re x-ben állított merőleges is $\mathscr{C}_\alpha$-ban van.

A bizonyítás vázlata 2.

Minden $\alpha < \omega_1$-re a $\varphi : \cup\mathscr{C}_\alpha \to [\omega]^\omega$ és $f : \cup H_\alpha \to \omega$ leképezések:

(9) Ha $x, y \in H_{\alpha+1} \setminus H_\alpha$, és $x \neq y$, akkor $f(x) \neq f(y)$.

(10) Ha $e \in \mathscr{C}_\alpha$, $x \in e$, $x \notin H_\alpha$, akkor $f(x) \in \varphi(e)$.

(11) Ha $C \in \mathscr{C}_\alpha$ kör, $i \in \varphi(C)$, $x, y \in C$, $f(x) = f(y) = i$, akkor x, y nem átellenes pontok C-n.

(12) Ha $C \in \mathscr{C}_\alpha$ kör, $i \notin \varphi(C)$, akkor C-n legfeljebb két olyan x pont található, amire $f(x) = i$.

(13) Ha $L \in \mathscr{C}_\alpha$ egyenes, és $i \notin \varphi(L)$, akkor legfeljebb egy olyan $x \in L$ létezik, amire $f(x) = i$.

(14) Ha $L_1, L_2 \in \mathscr{C}_\alpha$ merőleges egyenesek, $\{x\} = L_1 \cap L_2$, akkor $f(x) \notin \varphi(L_1) \cap \varphi(L_2)$.

A tétel megfordítása

Tétel (Erdős, Komjáth)

Ha a sík pontjai kiszínezhetők megszámlálhatóan sok színnel úgy, hogy ne keletkezzen derékszögű háromszög, aminek a csúcsai egyszínűek, akkor $c = \aleph_1$*.*

- $I, J \subset \mathbb{R}$, $|I| = \aleph_1$, $|J| = \aleph_2$, ekkor $I \times J$ pontait $\aleph_0$ színnel színezve létezik egyszínű tengelypárhuzamos téglalap
- Ha $i_1, i_2 \in I$, $k \in \omega$, akkor $(i_1, i_2, k) \mapsto j \in J$: (i_1, j) és (i_2, j) színe is k