Egyéni kutatómunka 2. beszámoló

ELTE TTK Matematika MSc.

Szabari Mátyás Márton
Témavezető: Dózsa Tamás

1. ~~Waveletek és~~* adaptív ortogonális projekciók

*Habár korábban waveletekkel is foglalkoztam (tanulás szintjén), azonban úgy alakult, hogy ebben a félévben nem jutottak olyan hangsúlyos szerephez abban a témában, amit próbáltam átnézni, ennek okán a beszámolóban sem írok róluk.

1.1. VP módszer

Legyen $\mathcal{H}$ egy Hilbert tér (a továbbiakban ez az L^2 tér vagy a H^2 Hardy tér lesz). Ha adva van egy $\Phi_n (n \in \mathbb{N})$ teljes ortonormált sorozat, akkor tetszőleges $f \in \mathcal{H}$-t rögzített $n \in \mathbb{N}^*$-ra az

$$\hat{f}_n = S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \langle f, \Phi_k \rangle \Phi_k$$

részletösszegekkel közelíteni tudunk. Ha $\mathcal{S}_n = \operatorname{span}\{\Phi_0, \ldots, \Phi_{n-1}\} \subset \mathcal{H}$ altér és P_n az $\mathcal{S}_n$-re való ortogonális projekció, akkor $\hat{f}_n = P_{\mathcal{S}_n} f$, továbbá

$$\operatorname{dist}(f, \mathcal{S}_n) = \inf_{g \in \mathcal{S}_n} \|g - f\| = \min_{g \in \mathcal{S}_n} \|g - f\| = \|P_{\mathcal{S}_n} f - f\|.$$

Habár ez a fajta approximáció nagyon sok esetben hasznos, azonban bizonyos esetekben nem elég rugalmas és nem elég hatákony. A témekör, amivel foglalkoztam, alapötlete az, hogy a Φ_n függvényeket lecseréljük egy Φ_n^η függvénycsaládra, ahol $\eta \in \mathbb{R}^m$ egy olyan (nemlineáris) paraméterezés, amivel a függvénycsalád teljes ortonormált sorozat marad. Vagyis a feladat felírható a következő minimalizálási problémaként:

$$\min_{\eta \in \mathbb{R}^m} \|f - P_{\mathcal{S}_n^\eta}\|^2 = \min_{\eta \in \mathbb{R}^m} \|f - \sum_{k=0}^{n-1} \langle f, \Phi_k^\eta \rangle \Phi_n^\eta\|^2 = \min_{\eta \in \mathbb{R}^m} \|f - \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\eta) \Phi_n^\eta\|^2$$

Diszkrét esetben, rögzített η-ra a $c_k(\eta)$ lineáris paraméterek könnyen kiszámolhatóak a Moore-Penrose pszeudoinverz segítségével. A optimális η-t azonban sokszor nem egyszerű explicit kiszámolni, ezért ezt például valamilyen gradiens alapú módszerrel lehet optimalizálni (például Levenberg-Marquardt algoritmus, minekutána az η-ra nézve egy nem-lineáris legkisebb négyzetek probléma). Ebben az esetben célszerű a

$$J_{ik} = \frac{\partial}{\partial \eta_k}\Big(\beta\big(\eta, c(\eta)\big)(t_i)\Big)$$

Jacobi mátrix elemeit kiszámolni, ahol

- $c(\eta) = \big(c_0(\eta), ..., c_{n-1}(\eta)\big)$ a lineáris paraméterek;
- $\beta(\eta, \hat{c}) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{c}_k(\eta)\Phi_n^\eta$, a $\hat{c} \in \mathbb{R}^n$-nel lineárisan és az $\eta \in \mathbb{R}^m$-mel nem-lineárisan paraméterezett függvény;
- t_i-k pedig a $i \in I$ véges halmazzal paraméterezett értelmezési tartomány pontjai.

Ehhez a [3] cikkben leírt módszert lehet használni.

1.2. Hermite rendszerek

A $w(x) = e^{-x^2}$ súlyfüggvénnyel súlyozott $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert térben a H_n $(n \in \mathbb{N})$ Hermite polinomok egy teljes ortogonális sorozatot alkotnak (az $1, x, x^2, ...$ monomok Gram-Smidt ortogonalizáltjai a w súlyfüggvényre). Ezekből egyszerűen lehet teljes ortonormált sorozatot készíteni a klasszikus L^2 Hilbert-térben a következő módon:

$$\Phi_n(x) = \frac{H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi^{\frac{1}{2}}2^n n!}}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezeket a Φ_n-eket Hermite függvényeknek nevezzük. Ezekből úgy kaphatunk adaptív rendszereket, hogy az affin transzformáltjaikat paraméterezzük, vagyis $a \in \mathbb{R}$ eltolással és $\lambda \in \mathbb{R}_+$ dilatációval:

$$\Phi_n^{a,\lambda}(x) = \Phi_n(\lambda x + a).$$

Az a és a λ optimalizálásával jobb közelítéseket kaphatunk, anélkül, hogy növelnénk a Fourier-együtthatók számát.

1.3. Malmquist-Takenaka rendszerek

A Malmquist-Takenaka rendszerek (röviden MT-rendszerek), olyan teljes ortogonális rendszerek, melyek paraméterezéséhez végtelen (pontosabban tetszőlegesen sok) paramétert lehet használni. Ezt a témakört elsődlegesen Schipp Ferenc Tanár Úr [1] jegyzetéből dolgoztam fel. Ennek nem jutottam el a végére, azonban ez a közeljövőben meg fog történni, mert ez alapján tervezek tovább kutatni (illetve TDK-t és szakdolgozatot írni).

1.3.1. Blaschke-függvények

A Malmquist-Takenaka rendszerek bevezetéséhez szükségünk lesz a Blaschke-függvények fogalmára.

Egy adott $0 \neq a \in \mathbb{C}$ komplex számra vezessük be az $a^* = 1/\bar{a}$ jelölést.

1.1. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{D}$ egy tetszőleges komplex szám, ekkor a

$$B_a : \mathbb{C} \setminus \{a^*\} \to \mathbb{C} \qquad B_a : z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

függvényt az a paraméterű **Blaschke-függvénynek** nevezzük.

Gyakran célszerű kiterjeszteni a Riemann-gömbre a következő módon:

$$B_a(a^*) = \infty, \qquad \text{illetve} \qquad B_a(\infty) = -a^*.$$

1.2. *Megjegyzés.* A B_a függvény pólusa (a^*) az egységkörre vett tükörképe ($z \mapsto 1/z$) a gökének (a).

Tetszőleges $a, z \in \mathbb{C}$-re fennáll a következő egyenlőség:

$$1 - |B_a(z)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\hat{a}z|^2}.$$

Ezzel könnyen belátható, hogy $B_a\langle\mathbb{D}\rangle \subseteq \mathbb{D}$ és $B_a\langle\mathbb{T}\rangle \subseteq \mathbb{T}$ (ahol $B_a\langle X\rangle$ az $X \subset \mathbb{C}$ halmaz képét jelöli B_a-nál). Továbbá B_a invertálható és $B_a^{-1} = B_{-a}$. Innen adódik, hogy $B_a\big|_{\mathbb{D}}$ és $B_a\big|_{\mathbb{T}}$ homeomorfizmus.

A továbbiakban a Blascke függvényeket a körlapra (vagy az egységkörre) megszorítva fogjuk használni.

1.3. *Megjegyzés.* Definiálhatunk Blaschke-függvényeket a felső félsíkon is és a Cayley transzformáció segítségével belátható, hogy ezek kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek a körlapon definiált Blaschke-függvényeknek. Tetszőleges $a \in \mathbb{C}_+$-ra legyen:

$$b_a : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+ \qquad b_a : z \mapsto \frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

Ekkor felírható az alábbi egyenlőség:

$$B_a$$

Mivel a $B_a\big|_{\mathbb{T}}$ függvény homeomorfizmus, ezért egy megfelelő $\beta_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény segítségével felírható az alábbi alakban:

$t \in \mathbb{R}$-re:

$$B_a\big|_{\mathbb{T}}(e^{it}) = e^{i\beta_a(t)}.$$

Tetszőleges $s \in \mathbb{R}_+$-ra legyen:

$$\hat{\gamma}_s(t) = \begin{cases} 2\arctan(s\tan(t/2)), & \text{ha } t \in (-\pi, \pi) \\ -\pi, & \text{ha } t = -\pi \\ \pi, & \text{ha } t = \pi \end{cases}$$

és definiáljuk a γ függvényt a $\hat{\gamma}$ olyan t-beli kiterjesztéseként, melyre $\gamma\big|_{[-\pi,\pi]} = \hat{\gamma}$ és $\gamma_s(t+2\pi) = \gamma_s(t) + 2\pi$.

Továbbá definiáljuk az $s : [0,1) \to \mathbb{R} \quad s : r \mapsto \frac{1+r}{1-r}$ függvényt. Ekkor A következőt állíthatjuk:

1.4. Tétel. *A $\gamma_{s(r)}$ függvény (t-szerinti) deriváltja a Poisson magfüggvény:*

$$\gamma'_{s(r)}(t) = P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2rcost+r^2}$$

Továbbá $a \in \mathbb{D}$-re $a = re^{i\alpha}$ esetén a B_a Blaschke-függvényhez fentebb említett β_a függvényre teljesül, hogy $\beta_a(t) = \gamma_{s(r)}(t-\alpha) + \alpha$, vagyis:

$$B_a(e^{it}) = e^{i\beta_a(t)} = e^{i(\gamma_{s(r)}(t-\alpha)+\alpha)}.$$

Ugyan (a $\mathbb{D}$-vel paraméterezett) Blaschke-függvények kompozíciója kivezet a Blaschke-függvények köréből, azonban ezt meg lehet javítani, mert a kompozícióval kapott függvény mod $\mathbb{T}$ Blaschke (vagyis εB_a alakú, ahol $\varepsilon \in \mathbb{T}$ és $a \in \mathbb{D}$). Vagyis $\mathbb{D} \times \mathbb{T}$ segítségével be lehet vezetni egy csoportstruktúrát:

$$\mathfrak{B} := \{B_{\mathfrak{a}} := \varepsilon B_a | \mathfrak{a} := (a, \varepsilon) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}\}$$

A $\mathfrak{a}_1 = (a_1, \varepsilon_1)$ és $\mathfrak{a}_2 = (a_2, \varepsilon_2)$ $\mathbb{D} \times \mathbb{T}$-beli elemekre $B_{\mathfrak{a}} = B_{\mathfrak{a}_1} \circ B_{\mathfrak{a}_2}$, ahol:

$$\mathfrak{a} = (a, \varepsilon) = \left(\hat{\varepsilon_2}\frac{a_1 + a_2\varepsilon_2}{1 + a_1\hat{a_2}\hat{\varepsilon_2}}, \varepsilon_1\varepsilon_2\frac{1 + a_1\hat{a_2}\hat{\varepsilon_2}}{1 + \hat{a_1}a_2\varepsilon_2}\right).$$

Az $\mathfrak{a} = (a, \varepsilon)$ esetén pedig $B_{\mathfrak{a}}$ inverze $B_{\mathfrak{a}^{-1}}$, ahol $\mathfrak{a}^{-1} = (-\varepsilon a, \hat{\varepsilon})$.

1.5. *Megjegyzés.* Ha a $\mathbb{D}$-n tekintjük a hiperbolikus sík Poincaré féle körlap modeljét, akkor a $\mathfrak{B}$ csoport elemei ennek az irányítástartó izometriái lesznek.

1.6. *Megjegyzés.* Ha jól számolgattam, ez a csoport izomorf az $SU(1,1)$ csoporttal.

Itt még lenne sok érdekesség, amit most idő hiányában tovább át ugranom.

1.3.2. Malmquist-Takenaka rendszerek

Ebben részben pedig bevezetem a **Malmquist-Takenaka rendszereket**.

Legyen $\mathbf{a} = (a_0, a_1, ...)$ $a_n \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}$ sorozat (ezeket a sorozatokat jelölje $\mathbf{A}$) és jelölje m_n az a_n elem előfordulását $n \in \mathbb{N}$-ig (vagyis $m_n = |\{k | k \in \mathbb{N}, k \leq n, a_k = a_n\}|$).

Ekkor definiáljuk a következő **a** által mwghatározott racionális függvények sorozatát (n szerint):

$$q_{a_n,m_n-1}(z) = \frac{z^{m_n-1}}{(1-\bar{a}_n z)^{m_n}}$$

1.7. Állítás. *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ számra és $f \in H^2(\mathbb{D})$ Hardy-tér-beli függvényre*

$$\langle f, q_{a,n}\rangle = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

1.8. Definíció. Egy $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ sorozat által generált **Malmquist-Takenaka rendszernek** a

$$\Phi_n^{\mathbf{a}}(z) = \frac{\sqrt{1-|a_n|^2}}{1-\bar{a}_n z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z} = \frac{\sqrt{1-|a_n|^2}}{1-\bar{a}_n z}\prod_{k=0}^{n-1} B_{a_k}(z)$$

függvényrendszert nevezzük.

Ez a függvényrendszer nem más, mint a q_{a_n,m_n-1} rendszer $H^2(\mathbb{D})$ skalárszorzatára vett Gram-Smidt ortogonalizációval kapott rendszer.

Speciális esetként, ha $a_n = 0$ minden n-re, akkor a hatványfügvényeket kapjuk.

1.9. Tétel. *Tekintsük az $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ sorozatot. Ekkor az ehhez tartozó MT-rendszer ortonormált a $H^2(\mathbb{D})$ skalárszorzatára, vagyis minden $n, m \in \mathbb{N}$-re:*

$$\langle \Phi_m^{\mathbf{a}}, \Phi_n^{\mathbf{a}}\rangle = \delta_{n,m}.$$

1.10. Állítás. *Valamilyen $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$-ra a $\Phi_n^{\mathbf{a}}$ függvényrendszer pontosan akkor teljes $H^2(\mathbb{D})$-ben, ha az $\mathbf{a}$ nem teljesíti a Blaschke-feltételt, vagyis a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|)$$

összeg végtelen.

1.11. *Megjegyzés.* Ismert tétel, hogy ha egy $\mathbf{A}$ sorozatra teljesül a Blaschke-feltétel, akkor a

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{|a_k|}{a_k}B_{a_k}(z)$$

szorzat kompakt halmazokon egyenletesen konvergens $\mathbb{D}$-n (ahogy $n \to \infty$).

Egy tetszőleges $f \in H^2(\mathbb{D})$-re a

$$\hat{f}_{\mathbf{a}} : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \qquad \bar{f}_{\mathbf{a}} :\mapsto \langle f, \Phi_n^{\mathbf{a}}\rangle$$

függvényt az f függvény **a** szerinti MT-Fourier sorának nevezzük. Ennek részletösszegeit kifejezhetjük a K_n Szegő-kernel segítségével:

$$
\begin{aligned}
(S_n^{\mathbf{a}} f)(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} \langle f, \Phi_k^{\mathbf{a}} \rangle \Phi_k^{\mathbf{a}}(z) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k^{\mathbf{a}}(z) \overline{\Phi_k^{\mathbf{a}}}(e^{it}) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) K_n(z, e^{it}) dt
\end{aligned}
$$

[...]

A trigonometrikus esethez hasonlóan, az MT-Fourier-sorokról is különböző konvergencia-tételeket belátni a H^p terekben, a közeljövőben ezeket a tételeket fogom közelebbről átnézni.

Hivatkozások

[1] Schipp Ferenc. *Racionális ortogonális rendszerek*, elektronikus jegyzet, 2016.

[2] Dózsa Tamás, Bognár Gergő, Kovács Péter. *Ensemble Learning for Heartbeat Classification Using Adaptive Orthogonal Transformations*, Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2019 (pp.355-363), April 2020

[3] Dianne P. O'Leary, Bert W. Rust. *Variable projection for nonlinear least squares problems*, Computational Optimization and Applications volume 54, pages579–593 (2013), August 2012

[4] Dózsa Tamás, Kovács Péter. *ECG Signal Compression Using Adaptive Hermite Functions*, Advances in Intelligent Systems and Computing 399:245-254, January 2016