Egyéni kutatómunka 2: Adaptív ortogonális projekciók

Szabari Mátyás

Témavezető: Dózsa Tamás

2021. december 17.

Áttekintés

Approximáció Hilbert-terekben

- $\Phi_n (n \in \mathbb{N})$ teljes ortonormált sorozat $\mathcal{H}$ Hilbert-térben
- Adott $f \in \mathcal{H}$t lehet közelíteni a részletegyütthatókkal:

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \langle f, \Phi_k \rangle \Phi_k = P_n f$$

- ahol P_n a $\mathcal{S}_n = \mathrm{span}\{\Phi_0, ..., \Phi_{n-1}\}$
- Ez a legjobb közelítés (vagyis minimalizálja a $\|f - g\|$ $(g \in \mathcal{S}_n)$ függvényt).
- Probléma: nem elég hatékony (alkalmazásokban)

VP-módszer

- Ötlet: nem-lineáris paraméterek bevezetése.
- Φ_n függvényeket lecseréljük Φ_n^η függvényekre ($\eta \in U \subset \mathbb{R}^m$), úgy, hogy rögzített η-ra a rendszer egy teljes ortonormált sorozat maradjon.
- Ez egy nem-lineáris optimalizálási probléma, ahol a célfüggvény:

$$\|f - \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\eta)\Phi_n^\eta\|^2$$

- A módszer lényege, hogy viszont rözített η-ra már egy lineáris optimalizálási feladattá vállik, amit egyszerű megoldani.

Hermite rendszer

- A $w(x) = e^{-x^2}$ súlyfüggvénnyel súlyozott $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert térben a H_n $(n \in \mathbb{N})$ Hermite polinomok egy teljes ortogonális sorozatot alkotnak.
- Ezért $L^2(\mathbb{R})$-ben teljes ONS lesz a

$$\Phi_n(x) = \frac{H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi^{\frac{1}{2}} 2^n n!}}, \qquad (x \in \mathbb{R})$$

  függvénysorozat (*Hemite függvények*).
- Ezek affin transzformáltjait paraméterezhetjük a $(\lambda, a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$-val:

$$\Phi_n^{a,\lambda}(x) = \Phi_n(\lambda x + a).$$

Hermite rendszer alkalmazása

- Jól használható EKG jelekkel kapcsolatos feladatokban.
- Tömörítés.
- Klasszifikálás, például szívbetegségek felismerése, mivel jól használható módszer klasszikus klasszifikációk algoritmusokkal együtt (SVM, Neurális hálók, stb...).

MT-rendszerek (Blaschke függvények)

- *Blaschke függvénynek* nevezzük a

$$B_a : \mathbb{C} \setminus \{a^*\} \to \mathbb{C} \qquad B_a : z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

alakú Möbius transzformációkat.

- A továbbiakban felteszem, hogy $a \in \mathbb{D}$ (nyílt komplex egységkörlap)
- Így $B_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $B_a : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ és $B_a : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ diffeomorfizmus.
- Ennek az a gyöke és az $a^* = 1/\bar{a}$ (ami az egységkörre vett "tükörképe" az a-nak) pólusa.
- Inverz: $(B_a)^{-1} = B_{-a}$

MT-rendszerek (Blaschke függvények 2.)

- Lehet definiálni a $\mathbb{C}_+ \subset \mathbb{C}$ felső félsíkon is:

$$b_a : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+ \qquad b_a : z \mapsto \frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

alakban.

- Ezek megfeleltethetőek a körlapon definiált Blaschke függvényekkel:

$$B_a \circ \mathfrak{C} = B_{-a} b_{a^*},$$

ahol a $\mathfrak{C}$ a Cayley transzformáció.

MT-rendszerek (Blaschke függvények 3.)

- A Blaschke függvények nem alkoznat csoportot a kompozícióra nézve, viszont csak egy $\varepsilon \in \mathbb{T}$ szorzó híján.
- Vagyis $\mathbb{D} \times \mathbb{T}$ segítségével be lehet vezetni egy csoportstruktúrát:

$$\mathfrak{B} := \{B_{\mathfrak{a}} := \varepsilon B_a | \mathfrak{a} := (a, \varepsilon) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}\}$$

A $\mathfrak{a}_1 = (a_1, \varepsilon_1)$ és $\mathfrak{a}_2 = (a_2, \varepsilon_2)$ $\mathbb{D} \times \mathbb{T}$-beli elemekre $B_{\mathfrak{a}} = B_{\mathfrak{a}_1} \circ B_{\mathfrak{a}_2}$, ahol:

$$\mathfrak{a} = (a, \varepsilon) = \left(\bar{\varepsilon_2} \frac{a_1 + a_2\varepsilon_2}{1 + a_1 \overline{a_2} \bar{\varepsilon_2}}, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1 + a_1 \bar{a_2} \bar{\varepsilon_2}}{1 + \bar{a_1} a_2 \varepsilon_2}\right).$$

Az $\mathfrak{a} = (a, \varepsilon)$ esetén pedig $B_{\mathfrak{a}}$ inverze $B_{\mathfrak{a}^{-1}}$, ahol $\mathfrak{a}^{-1} = (-\varepsilon a, \bar{\varepsilon})$.

MT-rendszerek (Blaschke függvények 4.)

- Egy Blaschke függvény felfogható a hiperbolikus sík Poincaré-féle körlapmodeljének eltolásaival ($0 \mapsto -a$ és $a \mapsto 0$).
- A Blaschke csoport elemei az irányítástartó izometriái.
- Izomorf $PU(1,1)$-gyel.

MT-rendszerek (Blaschke szorzat)

- Legyen $\alpha = (a_0, a_1, ...) \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ sorozat.
- Ekkor ha teljesül a **Blaschke feltétel**, vagyis hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1 - |a_n|),$$

akkor a

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{a_k} B_{a_k}(z) = B_\alpha(z)$$

létezik és véges, továbbá $B_\alpha \in H^\infty(\mathbb{D})$.

- ($a_k = 0$ esetén a faktort z-nek definiáljuk.)

MT-rendszerek

- Legyen $\mathrm{a} = (a_0, a_1, ...) \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$. Jelölje $m_n = |\{k | k \in \mathbb{N}, k \leq n, a_k = a_n\}|$ az a_n érték előfordulásainak számát n-ig (multiplicitás).
- Ekkor definiáljuk a következő H^∞-beli függvényt:

$$q_{a_n, m_n - 1}(z) = \frac{z^{m_n - 1}}{(1 - \bar{a}_n z)^{m_n}}$$

Állítás

Tetszőleges $a \in \mathbb{D},\ n \in \mathbb{N}$ számokra és $f \in H^2(\mathbb{D})$ Hardy-tér-beli függvényre

$$\langle f, q_{a,n} \rangle = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

MT-rendszerek

Definition

Egy $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$ sorozat által generált **Malmquist-Takenaka rendszernek** a

$$\Phi_n^{\mathbf{a}}(z) = \frac{\sqrt{1-|a_n|^2}}{1-\bar{a}_n z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z} = \frac{\sqrt{1-|a_n|^2}}{1-\bar{a}_n z} \prod_{k=0}^{n-1} B_{a_k}(z)$$

függvényrendszert nevezzük.

Ez a függvényrendszer nem más, mint a q_{a_n, m_n-1} rendszer $H^2(\mathbb{D})$ skalárszorzatára vett Gram-Smidt ortogonalizációval kapott rendszer.

MT-rendszerek

Állítás

Tekintsük az $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ *sorozatot. Ekkor az ehhez tartozó MT-rendszer ortonormált a* $H^2(\mathbb{D})$ *skalárszorzatára, vagyis minden* $n, m \in \mathbb{N}$*-re:*

$$\langle \Phi_m^{\mathrm{a}}, \Phi_n^{\mathrm{a}} \rangle = \delta_{n,m}.$$

Állítás

Valamilyen $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$*-ra a* Φ_n^{a} *függvényrendszer pontosan akkor teljes* $H^2(\mathbb{D})$*-ben, ha az* a *nem teljesíti a Blaschke-feltételt.*

Hivatkozások

- Schipp Ferenc. *Racionális ortogonális rendszerek*, elektronikus jegyzet, 2016.
- Dózsa Tamás, Bognár Gergő, Kovács Péter. *Ensemble Learning for Heartbeat Classification Using Adaptive Orthogonal Transformations*, Computer Aided Systems Theory – EUROCAST 2019 (pp.355-363), April 2020
- Dianne P. O'Leary, Bert W. Rust. *Variable projection for nonlinear least squares problems*, Computational Optimization and Applications volume 54, pages579–593 (2013), August 2012
- Dózsa Tamás, Kovács Péter. *ECG Signal Compression Using Adaptive Hermite Functions*, Advances in Intelligent Systems and Computing 399:245-254, January 2016

Köszönöm a figyelmet!